République Tunisienne
Présidence du Gouvernement

Ecole Nationale d'Administration
24, Avenue du Dr Calmette Mutuelle-ville 1082 Tunis
Tél. (+216) 848 300 Fax (+216) 794 188
www.ena.nat.tn

CHOIX D'INVESTISSEMENT ET DE FINANCEMENT

Par
Amel HACHICHA
Maître-assistante
Amel.Hachicha@ihec.rnu.tn

Septembre 2013

SYLLABUS DU COURS DE

CHOIX D'INVESTISSEMENT ET DE FINANCEMENT

1- OBJECTIF DU COURS

Par opposition à la finance de marché tournée vers le fonctionnement, l'organisation et la réalisation des opérations sur les marchés financiers, la finance d'entreprise procédant de l'intérieur de celle-ci, porte sur l'ensemble des décisions des entreprises qui ont, à terme, des implications financières sur la valeur de la firme pour ses actionnaires. Ces décisions sont traditionnellement réparties en deux grands axes :

- les décisions d'investissement, relatives à l'emploi des fonds de l'entreprise, dans la réalisation de projets ;
- les décisions de financement, relatives à la collecte des fonds nécessaires à la réalisation du programme d'investissement, complétées par les décisions de rémunération des apporteurs de fonds, notamment les actionnaires, via la distribution de dividendes.

Les décisions d'investissement sont chronologiquement les premières décisions stratégiques à prendre, puisque ce sont elles qui déterminent les financements nécessaires et les risques auxquels l'entreprise aura à faire face. Leur pertinence dépend de la capacité de l'entreprise à bien définir sa politique de croissance (choix entre investissements de modernisation, de maintenance, d'expansion, voire carrément, désinvestissement) et à bien prévoir les flux qui risquent d'être générés par le projet, le but ultime étant de savoir s'il faut défendre, améliorer ou abandonner des positions concurrentielles face aux changements raisonnablement prévisibles de l'environnement.

Les décisions d'investissement, par les besoins et les ressources qu'elles induisent, entraînent, à leur tour, des choix concernant la politique financière de l'entreprise, concrètement, sa politique d'endettement et sa politique de dividendes. Dans ce sens, l'entreprise doit essentiellement veiller à mobiliser les ressources adéquates en les combinant de sorte à ce que la société ait une structure financière optimale tant du point de vue du coût des ressources, que du ratio d'endettement. Mais elle doit également, veiller à protéger le capital de la société afin d'éviter les problèmes de dilution du pouvoir lors des augmentations de capital et à définir une politique cohérente de distribution des dividendes qui assure une rémunération correcte et stable aux actionnaires, tout en laissant un autofinancement suffisant à l'unité.

De par leur impact sur la viabilité de l'entreprise, les décisions d'investissement et de financement constituent en fait, des décisions stratégiques, qui doivent être prises dans le cadre d'une politique générale puis financière, préalablement définies, en termes d'objectifs de croissance, de rentabilité et d'autonomie financière, trois objectifs qui supposent, chacun, la résolution d'un problème en soi, mais surtout la résolution des problèmes d'incompatibilité qui manquent rarement de surgir entre les trois.

En soi, la croissance pose le problème de l'adéquation des moyens financiers aux objectifs économiques ; la rentabilité renvoie au problème de la rentabilité économique par rapport au coût de capital mais également au problème de la rentabilité financière des actionnaires et à leur rémunération ; enfin, l'indépendance traduit le problème de la structure du passif (rapport dettes / fonds propres) et de son impact sur le pouvoir des actionnaires.

Ciblés en même temps, ces trois objectifs se révèlent souvent incompatibles. A titre d'exemple, une croissance rapide risque de se faire au détriment de l'indépendance ou de la rentabilité des fonds propres ; inversement, la recherche d'une rentabilité élevée peut limiter la croissance si elle est combinée à une volonté d'indépendance...

Une entreprise financièrement saine est une entreprise qui aura réussi à trouver le juste équilibre entre ces trois objectifs et sa valeur sera le reflet de ses succès ou échecs dans chacun de ces trois domaines. Les entreprises qui investissent dans des projets rentables, qui présentent une structure financière équilibrée et qui assurent une politique de distribution correcte qui ne se fait pas au détriment du réinvestissement, auront des valeurs plus élevées que des entreprises qui échouent en fonction de ces trois critères.

L'objectif de ce cours, est d'aborder dans le détail, les aspects techniques des décisions d'investissement et de financement afin que l'apprenant soit en mesure de maîtriser les processus d'investissement dans l'entreprise à travers l'étude de la rentabilité et du risque des projets ; de connaître les principaux moyens de financement qui sont à la disposition des entreprises avec leurs avantages, leurs risques et leurs coûts et enfin, d'être en mesure d'analyser l'impact des choix effectués en matière d'investissement et de financement sur la stratégie de l'entreprise et sur son devenir.

2- PLAN DU COURS

CHAPITRE N° 1 : LA DECISION D'INVESTISSEMENT EN SITUATION DE CERTITUDE ET DE PERFECTION DES MARCHES DE CAPITAUX

I. Introduction à la notion d'investissement

II. Les paramètres caractéristiques d'un investissement
- II.1. L'investissement initial
- II.2. Les flux financiers

III. Evaluation des projets d'investissement
- III.1. Les critères atemporels de choix des investissements
- III.2. Les critères temporels de choix des investissements

IV. Limites des critères temporels en matière de comparaison de projets : les alternatives incomplètes
- IV.1. 1ère alternative incomplète : des dépenses initiales différentes
- IV.2. 2e alternative incomplète : des durées de vie différentes

CHAPITRE N° 2 : LES DECISIONS D'INVESTISSEMENT EN SITUATION DE RISQUE ET D'INCERTITUDE

I. Les notions d'incertitude et de risque
- I.1. Définitions
- I.2. L'attitude des investisseurs face au risque

II. Choix d'investissement en avenir incertain : les méthodes traditionnelles
- II.1. Les méthodes basées sur le taux d'actualisation
- II.2. L'approche de l'équivalence de certitude
- II.3. Confrontation de la méthode du taux ajusté et de la méthode de l'équivalence de certitude

III. Choix d'investissement en avenir risqué
- III.1. Les méthodes probabilistes
- III.2. La méthode des arbres de décision

CHAPITRE N° 3 : LE CHOIX D'INVESTISSEMENT EN AVENIR ALEATOIRE ET LA FONCTION D'UTILITE

I. Introduction à la théorie des décisions individuelles
- I.1. Présentation du cadre théorique
- I.2. La fonction d'utilité et les axiomes de rationalité

II. Définition et construction des fonctions d'utilité
- II.1. Définition
- II.2. Construction des fonctions d'utilité

CHAPITRE N° 6 : LA THEORIE DE LA STRUCTURE FINANCIERE DE LA FIRME : LA POLITIQUE DES DIVIDENDES

I. Introduction au concept de politique des dividendes

II. Neutralité de la politique des dividendes : la thèse de Modigliani et Miller
 II.1. Les hypothèses de M.M. (1961)
 II.2. Le modèle de M.M. (1961)
 II.3. Critique du modèle de M.M. (1961)

III. Importance de la politique des dividendes : l'école traditionnelle
 III.1. Observations préliminaires
 III.2. Principaux modèles de l'école traditionnelle

IV. La politique des dividendes sur le plan empirique

CHAPITRE N° 7 : SYNTHESE DES DECISIONS D'INVESTISSEMENT ET DE FINANCEMENT : LA PLANIFICATION FINANCIERE

I. Objet de la planification financière

II. Elaboration du plan d'investissement et de financement (PIF)
 II.1. Représentation du PIF
 II.2. Le détail des éléments constitutifs du PIF

3- BIBLIOGRAPHIE

- **OUVRAGES**

ALBOUY M., Finance : investissement, financement, acquisitions - Economica, 3e édition, 2010.

ARROW K., The theory of risk aversion - Paru dans Aspects of the theory of risk bearing - Yrjö Jahnssonin Säätiö, 1965.

BREALEY R. et MYERS S., Principes de gestion financière des entreprises - International Mc Graw Hill, 8e édition, 2006.

CHARLES A., Le financement des entreprises – Economica, 2009.

CHARREAUX G., Finance d'entreprise – EMS Editions, 2e édition, 2000.

DEGOS J-G. et GRIFFITHS S., Gestion financière : de l'analyse à la stratégie - Organisation, 2e édition, 2011.

HOUDAYER R., Evaluation financière des projets – Economica - 3e édition, 2008.
MEYE F. O., Evaluation de la rentabilité des projets d'investissement : méthodologie pratique. L'Harmattan, 2007.

SOLOMON E., The theory of financial management - Columbia University Press, 1963.

VERNIMMEN P., Finance d'entreprise - Dalloz, 12e édition, 2014.

VON NEUMANN J. et MORGENSTERN O., Theory of games and economic behavior - Princeton University Press, 1944.

- **ARTICLES**

ARDITTI F. et LEVY H., The weighted average cost of capital as a cutoff rate: a critical analysis of the classical textbook weighted average - Financial Management, volume 6, n°3, 1977, pages 24-34.

BATES G., Difficulties in determining investment policies - The Review of Economics and Statistics, volume 42, n°3, 1960, pages 214-218.

BERNOULLI D., Specimen theoriae novae de mensura sortis - Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 5, 1738.

DURAND D., Costs of debt and equity funds for business: trends and problems of measurement - Conference on Research in Business Finance, National Bureau of Economic Research, New York, 1952, pages 215-247.

FRIEND I. et PUCKETT M., Dividends and stock prices - American Economic Review, volume 54, n°5, 1964, pages 656-682.

GORDON M. J., Optimal investment and financial policy - Journal of Finance – 1963, pages 264-272.

GORDON M.J. et SHAPIRO E., Capital equipment analysis: the required rate of profit - Management Science, 1956, pages 102-110.

LELAND H. et PYLE D., Informational asymmetries, financial structure, and financial intermediation - The Journal of Finance, volume 32, n° 2, 1977, pages 371-387.

LINTNER J., Dividends, earnings, leverage, stock prices and the supply of capital to corporations - Review of Economics and Statistics, 1962, pages 243-269.

MILLER M., Debt and taxes - The Journal of Finance, volume 32, 1977, pages 261-276.

MILLER M. et MODIGLIANI F., Some estimates of the cost of capital to the utility industry, 1954-57 - American Economic Review, volume 56, n°3, 1966, pages 333–391.

MODIGLIANI F. et MILLER M., Corporate income taxes and the cost of capital: a correction - American Economics Review, volume 53, 1963, pages 433-443.

MODIGLIANI F. et MILLER M., Dividend policy, growth and the valuation of shares - Journal of Business, volume 34, 1961, pages 411-433.

MODIGLIANI F. et MILLER M., The cost of capital, corporation finance and the theory of investment - American Economic Review, volume 53, 1958, pages 261-275.

PRATT J., Risk aversion in the small and in the large - Econometrica, volume 32, 1964, pages 126-136.

ROBICHEK A. et MYERS S., Conceptual problems in the use of risk-adjusted discount rates - Journal of Finance, volume 21, n°4, 1966, pages 727–730.

WARNER J., Bankruptcy costs, absolute priority and the pricing of risky debt claims - Journal of Financial Economics, volume 4, 1977, pages 239-276.

CHAPITRE N° 1

LA DECISION D'INVESTISSEMENT EN SITUATION DE CERTITUDE ET DE PERFECTION DES MARCHES DE CAPITAUX

I. Introduction à la notion d'investissement.

En finance, l'investissement consiste à immobiliser des capitaux, c'est à dire à engager une dépense immédiate, dans le but d'en retirer un gain sur plusieurs périodes successives. Cette dépense peut être engagée par l'entreprise pour différentes raisons : lancer de nouveaux produits, augmenter la capacité de production, améliorer la qualité des produits et services, réduire les coûts de production…

Quel qu'en soit l'objectif, les projets d'investissement ont une importance capitale dans le développement de l'entreprise, puisqu'ils conditionnent nécessairement sa compétitivité, sa rentabilité et sa solvabilité futures, c'est à dire en définitive, sa valeur. Ainsi, l'évaluation d'un projet d'investissement, consiste en fait, à évaluer son impact sur la valeur de marché de l'entreprise.

Dans ce premier chapitre portant sur les décisions d'investissement, nous cherchons à :

- définir la notion d'investissement ;
- évaluer les différents projets d'investissement auxquels s'intéresse l'entreprise ;
- sélectionner en fonction des résultats obtenus le ou les projets à retenir.

Pour cela, nous nous plaçons, pour commencer, dans un cadre simplifié où l'entreprise ne subit aucune incertitude sur ses décisions futures.

II. Les paramètres caractéristiques d'un investissement.

L'étude des décisions d'investissement s'entend en finance en référence aux liquidités générées par le projet, c'est à dire aux encaissements et décaissements effectués à chaque période du début jusqu'à la fin de la durée de vie du projet. Ces liquidités ou flux de trésorerie, sont généralement réparties en trois catégories :

- la dépense initiale appelée investissement initial ;
- les rentrées de fonds perçues durant la durée de vie du projet, appelées cash-flows ;
- la valeur de liquidation du projet à la fin de sa durée de vie, appelée valeur résiduelle.

II.1. L'investissement initial.

L'investissement initial comprend deux sortes de dépenses :

- les dépenses relatives à l'acquisition des immobilisations : elles comprennent essentiellement le prix des biens acquis, les frais d'étude, les dépenses d'installation et frais accessoires (frais de douane, de transport...), la formation du personnel spécialisé... ;

- les dépenses relatives à l'investissement en cycle d'exploitation générées par le projet, c'est à dire l'accroissement du besoin en fonds de roulement d'exploitation (BFRE) dû aux décalages entre les encaissements et les décaissements que provoquent les opérations d'exploitation (achat, production et vente). Ainsi, abstraction faite des variations de TVA à payer et à récupérer, la variation du BFRE se définit de la manière suivante :

$$\Delta BFRE = \Delta Créances\ clients + \Delta Stocks - \Delta Crédits\ fournisseurs$$

Le BFRE doit intervenir dans le calcul de l'investissement initial car l'entreprise pour pouvoir démarrer son projet, acheter des matières premières, accorder des délais à ses clients..., doit nécessairement avoir plus d'argent que le coût en soi des immobilisations. Par ailleurs, comme d'une année à l'autre ces besoins continuent à exister et ont même généralement tendance à augmenter à mesure que l'activité croît, l'investissement en BFR (implicitement supposé d'exploitation dans tout ce qui suit) devient un emploi permanent, et en tant que tel, nécessite des capitaux permanents, qui ne pourront être récupérés que durant la ou les années suivantes. C'est pour cette raison, que l'on ne dissocie pas en finance, l'investissement au sens classique du terme du BFRE et qu'on leur accorde à tous les deux, le même caractère de permanence.

II.2. Les flux financiers.

II.2.1. Définition.

Les cash-flows sont les flux monétaires qui découlent de l'adoption d'un projet d'investissement, indépendamment du mode de financement à adopter, c'est-à-dire sans prise en compte (ni directe ni indirecte) des charges financières du projet.

Les cash-flows peuvent être définis en brut ou en net :

- les cash-flows bruts (CFB) sont déterminés par la différence entre les recettes d'exploitation et les dépenses d'exploitation à l'exception des dotations aux amortissements (non décaissables) :

$$CFB_t = R_t - D_t \qquad \forall t = 1, ..., n$$

où :

  - R_t = les recettes encaissées durant la période t
  - D_t = les dépenses décaissées en t
  - n = la durée de vie du projet

- les cash-flows nets (CFN) sont obtenus en retranchant des CFB, l'impôt susceptible d'être généré par le projet :

$$CFN_t = CFB_t - I^{th}_t$$

avec : $I^{th}_t = BAI^{th}_t . \tau$

où :

- I^{th}_t = l'impôt théorique à payer sur les bénéfices dégagés dans la période t
- BAI^{th}_t = le bénéfice avant impôt théorique du projet en t, déterminé sur la base du chiffre d'affaires et de l'ensemble des charges et produits de l'entreprise (y compris les dotations aux amortissements et les plus ou moins-values sur cessions d'immobilisations), à l'exception des charges et produits financiers
- τ = le taux d'imposition des bénéfices de la société

II.2.2. Incidence de l'amortissement sur les CFN.

Les méthodes d'amortissement sont nombreuses et selon celle utilisée, les CFN calculés pour un projet donné, ne sont pas les mêmes (impact indirect des dotations aux amortissements sur l'impôt théorique). Nous citons à titre d'exemples, les quelques méthodes suivantes :

1°- L'amortissement linéaire : l'annuité d'amortissement, A_t, y est constante sur toute la durée de vie du projet :

$$A_t = VA / n = VA.TA_l \quad \forall t = 1, ..., n$$

avec :

- VA = la valeur à amortir
- n = la durée de vie du projet
- TA_l = le taux de l'amortissement linéaire = 1 / n

2°- L'amortissement dégressif : c'est un amortissement accéléré fait au taux de l'amortissement linéaire multiplié par un coefficient supérieur à 1, en fonction de la durée de vie du projet.

3°- L'amortissement SOYD (*Sum Of Years Digits*) : c'est également une méthode d'amortissement plus rapide que le mode linéaire, basée sur le cumul du nombre d'années du début jusqu'à la fin du projet S / :

$$S = 1 + 2 + ... + n$$

$$\Rightarrow \quad S = n.(n + 1) / 2$$

Les Annuités d'amortissement sont ensuite déterminées de la manière suivante :

$$\begin{cases} A_1 = (n / S).VA \\ A_2 = ((n - 1) / S).VA \\ ... \\ A_n = (1 / S).VA \end{cases}$$

4°- L'amortissement décroissant : cette méthode calcule un taux d'amortissement selon la formule suivante :

$$Taux = 1 - \sqrt[6]{Valeur\ résiduelle\ /\ valeur\ d'origine}$$

Ce taux est appliqué à la valeur d'origine et non à la valeur à amortir.

De cette manière, la méthode d'amortissement décroissant permet une plus forte dépréciation que la méthode d'amortissement linéaire durant les premières années de la durée de vie de l'investissement. Notons toutefois, qu'en définitive, les deux méthodes aboutissent à un total amorti identique.

<u>Principe du choix de la méthode d'amortissement</u> :

En matière de choix d'investissement, les entreprises préfèrent généralement la méthode d'amortissement qui donne les annuités les plus élevées dès le début, afin :

- de minimiser le risque en récupérant le plus vite possible l'argent investi ;
- et de comptabiliser durant les premières années de vie du projet, le plus de charges fictives (non décaissables) possibles, afin de payer moins d'impôt dans une période où les projets ne sont pas encore très rentables.

II.3. La valeur résiduelle.

Toute immobilisation peut avoir une valeur résiduelle qui résulte soit de son utilisation à d'autres fins, soit de sa revente. L'existence d'une valeur résiduelle (VR) affecte :

- les amortissements : lorsqu'il existe une valeur résiduelle, la base d'amortissement (VA) n'est plus la valeur d'origine I_0, mais la valeur (I_0 - VR) ;
- les cash-flows à travers les amortissements ;
- et les impôts dus sur les plus ou moins values de cession au moment où la vente a réellement lieu.

Il y a plus-value de cession, quand le prix de cession (PC) est supérieur à la valeur résiduelle de la machine. Il y a au contraire, moins-value de cession, quand PC est inférieur à VR.

<u>Dans le 1er cas</u> : la société encaisse d'une part le PC, mais paie d'autre part à l'administration fiscale un impôt égal à : τ.(PC - VR). Ainsi, l'encaissement généré par la revente de la machine n'est que de :

$$PCN_n = PC_n - \tau.(PC_n - VR_n)$$

où, PCN_n s'appelle le prix de cession net de la machine à la période n.

<u>Dans le 2e cas</u> : la société encaisse toujours d'une part le PC, mais elle réalise par ailleurs une économie fiscale, car elle vend l'immobilisation moins cher qu'elle ne vaut et réalise ainsi une perte qui vient diminuer son assiette fiscale de (VR - PC). Ainsi, au total, le flux généré par la revente de la machine est de :

$$PCN_n = PC_n + \tau.(VR_n - PC_n)$$

III. Evaluation des projets d'investissement.

L'évaluation d'un investissement permet à l'entreprise de voir si le projet étudié est rentable, et s'il est donc opportun de le réaliser. Par contre, si l'entreprise hésite entre plusieurs projets, l'évaluation de chacun d'eux lui permet de repérer celui qui est le plus rentable. Dans ce dernier cas, on suppose que les projets sont :

- indépendants : l'acceptation de l'un n'a aucun effet sur la rentabilité de l'autre. En d'autres termes, les cash-flows de l'un ne sont pas modifiés par le fait que le second sera ou ne sera pas réalisé ;
- et mutuellement exclusifs : l'acceptation de l'un entraîne automatiquement le rejet de l'autre.

Nous distinguerons dans cette section, deux grandes catégories de critères permettant d'opérer un choix d'investissement : les critères temporels et les critères atemporels.

III.1. Les critères atemporels de choix des investissements.

Les critères atemporels sont des mesures de rentabilité, qui ne tiennent pas compte de l'influence du facteur temps sur la valeur de l'argent. On distingue essentiellement deux critères atemporels qui sont le taux moyen de rentabilité et le délai de récupération.

III.1.1. Le taux moyen de rentabilité (TMR).

C'est une méthode comptable. Le TMR est le rapport du bénéfice annuel moyen après impôts à l'investissement net moyen pendant la durée du projet :

TMR = Bénéfice net moyen annuel / Investissement net moyen annuel

Le TMR étant une méthode comptable, l'investissement doit être évalué sur des bases comptables en tenant compte des dotations aux amortissements qui impactent la valeur de l'investissement entre le début et la fin de l'année :

$$\begin{cases} 1^{\text{ère}} \text{ année :} & \textit{Valeur moyenne de l'investissement sur l'année} = (I_0 + VCN_1) / 2 \\ 2^{\text{e}} \text{ année :} & \textit{Valeur moyenne} = (VCN_1 + VCN_2) / 2 \\ \ldots & \\ n^{\text{e}} \text{ année :} & \textit{Valeur moyenne} = (VCN_{n-1} + VCN_n) / 2 \textit{ avec } VCN_n = VR_n \end{cases}$$

D'où, la moyenne sur n années :

$$INM = [(I_0 + VCN_1) / 2 + (VCN_1 + VCN_2) / 2 + \ldots + (VCN_{n-1} + VCN_n) / 2] / n$$

$$\Rightarrow \quad INM = [I_0 + 2.\sum_{t=1}^{n-1} VCN_t + VR_n] / 2.n$$

Notons que cette formule se simplifie énormément dans le cas où la méthode d'amortissement adoptée est celle linéaire :

$$\begin{aligned} INM &= [I_0 / 2 + VCN_1 + VCN_2 + \ldots + VCN_{n-1} + VR_n / 2] / n \\ &= [I_0 / 2 + (I_0 - A) + (I_0 - 2.A) + \ldots + (I_0 - (n - 1).A) + VR_n / 2] / n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad INM = [I_0 / 2 + (n - 1).I_0 - A.\sum_{t=1}^{n-1} t + VR_n / 2] / n$$

$$\Rightarrow \quad INM = [I_0 / 2 + (n - 1).I_0 - A.(n - 1).n / 2 + VR_n / 2] / n$$

Or, nous savons que : $n.A = I_0 - VR_n$, ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
INM \quad &= [I_0 / 2 + (n - 1).I_0 - (n - 1).(I_0 - VR_n) / 2 + VR_n / 2] / n \\
&= [I_0 + 2.(n - 1).I_0 - (n - 1).I_0 + (n - 1).VR_n + VR_n] / 2.n \\
&= [n.I_0 + n.VR_n] / 2.n
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad INM = [I_0 + VR_n] / 2$$

<u>Remarque</u> :

Le TMR est parfois calculé par rapport à l'investissement initial. On obtient alors, le *Return on Original Investment* (ROI), qui se définit comme suit :

ROI = Bénéfice net moyen annuel / Investissement initial

<u>Principes de décision</u> :

On compare le TMR d'un projet à un taux minimum, afin de déterminer si le projet doit être accepté ou rejeté : sera retenu, tout projet dont le TMR est supérieur au taux minimum.

Si on dispose de plusieurs projets dont on ne doit retenir qu'un seul, on optera pour celui qui a le TMR le plus élevé. Bien entendu, on ne peut accepter un projet dont le TMR est négatif.

<u>Avantages et inconvénients</u> :

La principale qualité du TMR est sa simplicité. Il est basé sur des renseignements qui sont immédiatement disponibles. Par contre, les principales faiblesses de la méthode, proviennent de ce qu'elle est fondée sur des bénéfices comptables et non sur des cash-flows, et de ce qu'elle ne tient pas compte de l'étalement des flux dans le temps : les bénéfices de la dernière année sont pris en compte exactement de la même manière que ceux de la première année, alors qu'ils sont en réalité plus risqués, car plus incertains.

III.1.2. Le délai de récupération ou de recouvrement.

Le délai de recouvrement d'un projet, est le nombre d'années nécessaires pour récupérer la mise de fonds initiale.

Ainsi, si les cash-flows annuels sont :

- constants : le délai de récupération est égal au rapport du coût de l'investissement initial sur le cash-flow annuel ;
- variables : il faudra les cumuler jusqu'à parvenir à la récupération de la dépense initiale.

<u>Principe de décision</u> :

Plus courte est la durée de recouvrement, plus faible est supposé être le risque inhérent au projet, du fait de la disparition rapide de l'incertitude. Il s'agit donc, de comparer le délai de recouvrement calculé à un certain délai maximum fixé par l'investisseur et de ne retenir le projet que si son délai de recouvrement est inférieur au délai maximal fixé.

Avantages et faiblesses :

Bien que cette méthode tienne compte du temps et qu'elle utilise des cash-flows prévisionnels, elle souffre d'un important défaut qui est celui de n'accorder aucune importance aux cash-flows dégagés après le délai de récupération. Elle ne peut donc être utilisée pour mesurer la rentabilité. Notons cependant, que si cette méthode est très critiquée par les théoriciens, elle est largement employée en pratique comme complément d'autres méthodes plus élaborées, car elle donne aux dirigeants une vision limitée du risque et de la liquidité d'un projet.

III.2. Les critères temporels de choix des investissements.

Les insuffisances présentées par les deux méthodes atemporelles que nous venons de considérer, ont incité les économistes à développer d'autres méthodes qui tiennent compte du facteur temps, et qui soient basées sur les cash-flows. Les deux principaux critères ainsi développés, sont la valeur actuelle nette et le taux de rendement interne.

III.2.1. La valeur actuelle nette (VAN).

La VAN se définit comme étant la valeur totale des CFN générés par un projet d'investissement, diminuée de la dépense initiale. Tous les flux relatifs au projet doivent être actualisés par un taux qui constitue un coût d'opportunité du capital :

$$VAN = - I_0 + \sum_{t=1}^{n} [CFN_t / (1 + k)^t]$$

où :

- CFN_t = les cash-flows nets générés à la période t
- I_0 = l'investissement initial
- k = le taux d'actualisation
- n = la durée de vie du projet

Principes de décision :

La VAN indique le montant qu'un projet ajoute ou retranche de la valeur marchande d'une entreprise, en supposant que les fonds qui ne sont pas utilisés pour la réalisation du projet étudié, seront placés ailleurs au taux d'actualisation. Par conséquent, l'entreprise ne doit accepter que les projets qui lui procurent une VAN positive.

Si l'entreprise a le choix entre plusieurs projets qui s'excluent mutuellement, elle optera naturellement pour celui qui procure la VAN la plus élevée.

Avantages et inconvénients :

Si la VAN tient compte de l'actualisation et se base sur les cash-flows, elle présente l'inconvénient d'être subjective puisqu'un investissement initial plus important procure souvent à la firme des CFN plus importants, donc vraisemblablement une VAN plus élevée, sans être forcément pour autant le projet le plus rentable.

III.2.2. Le taux de rendement interne (TRI).

Le TRI est le taux d'actualisation qui annule la VAN. Il est donc déterminé de telle sorte que :

$$I_0 = \sum_{t=1}^{n} CFN_t / (1 + k)^t$$

<u>Principes de décision</u> :

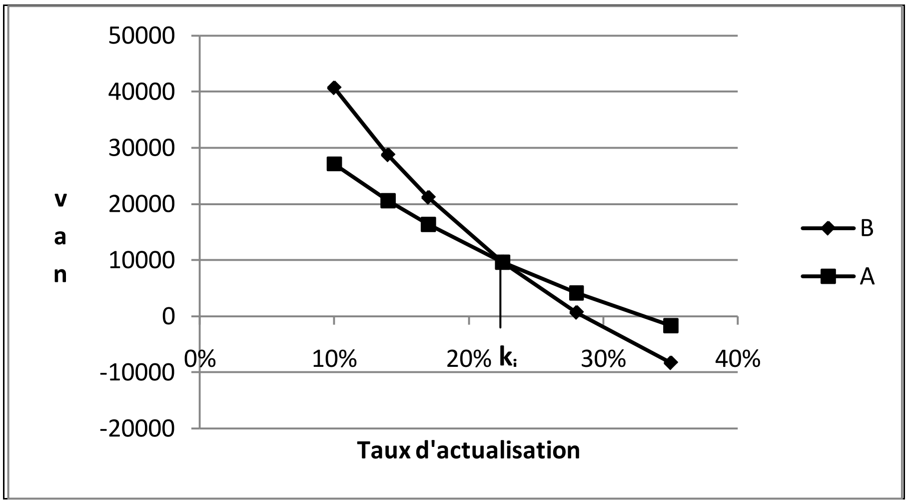
Pour décider d'accepter ou de refuser un projet d'investissement, on compare le TRI à un taux minimum souvent appelé taux d'acceptation ou de rejet. Si le TRI dépasse le seuil fixé, le projet est accepté, sinon, il est rejeté.

Quand la décision concerne plusieurs projets qui s'excluent mutuellement, on garde bien entendu, celui qui présente le TRI le plus élevé.

III.2.3. Les problèmes d'application posés par la VAN et le TRI.

1- <u>Confrontation de la VAN avec le TRI</u>.

Pour l'acceptation ou le refus d'un projet unique, la VAN et le TRI donnent systématiquement le même résultat. Par contre, dans le cas d'un choix d'investissement portant sur plusieurs projets, ces deux critères peuvent aboutir à des conclusions contradictoires, comme le montre le schéma suivant où on a à choisir entre deux projets A et B :



Si nous considérons l'intervalle [0, k_i[où k_i est le taux d'indifférence entre les deux projets, nous trouvons que la VAN_B est supérieure à la VAN_A, ce qui nous incite à préférer le projet B au projet A. Or, il se trouve que ceci est en contradiction avec le fait que nous avons par construction $TRI_A > TRI_B$. Ainsi, dans une même zone, nous sommes aussi bien portés à accepter qu'à refuser chacun des deux projets à tour de rôle.

Ce conflit entre la VAN et le TRI, provient en fait, des hypothèses implicites propres à chacune des deux méthodes :

- le TRI suppose que les fonds sont réinvestis au taux de rendement du projet considéré, jusqu'à la fin de celui-ci ;
- la VAN suppose que les cash-flows sont réinvestis au taux de rentabilité minimum de l'entreprise.

Ainsi, selon la méthode du TRI, l'autofinancement se fait à un taux implicite qui est différent selon le projet considéré. Au contraire, la VAN suppose implicitement que ce taux est égal au seuil de rendement exigé par la firme et qu'il est par conséquent inchangé pour tous les projets d'investissement. Ce taux représente en fait, le rendement minimum des opportunités d'investissement qui s'offrent à l'entreprise. Partant de ce constat, les théoriciens concluent à la supériorité de la VAN sur le TRI.

2- Problème du TRI multiple.

Lorsqu'un projet génère des cash-flows positifs et négatifs qui se succèdent durant sa durée de vie, on aboutit à plusieurs valeurs de TRI (généralement au nombre des changements de signes) sans savoir quelle solution retenir. Ceci est d'autant plus embarrassant que certains taux obtenus peuvent être inférieurs au seuil minimum fixé pour l'acceptation du projet et d'autres supérieurs !

III.2.4. Correction des hypothèses implicites de la VAN et du TRI.

Les deux problèmes que nous venons de voir concernant la VAN et le TRI peuvent être résolus en corrigeant les hypothèses de calcul implicites liées au choix du facteur d'actualisation. Des variantes aux deux critères sont créées en passant à la VANI (VAN intégrée) et au TRII (TRI intégré) qui supposent que les fonds obtenus chaque année, sont réinvestis à des taux différents qui reflètent les opportunités de placement des années considérées.

La valeur actuelle nette intégrée se définit comme suit :

$$VANI = - I_0 + [\sum_{t=1}^{n} CFN_t.(1 + r_t)^{n-t}] \;/ (1 + k)^n$$

où :

- k = le taux d'actualisation
- r_t = le taux de réinvestissement des cash-flows générés par le projet durant la période t

De même, le TIRI peut se définir comme étant le taux k tel que :

$$I_0 = [\sum_{t=1}^{n} CFN_t.(1 + r_t)^{n-t}] \;/ (1 + k)^n$$

où :

- k est le taux de rendement interne intégré
- r_t = le taux de réinvestissement des cash-flows générés par le projet durant la période t

IV. Limites des critères temporels en matière de comparaison de projets : les alternatives incomplètes.

On parle de stratégies incomplètes à chaque fois que les projets que l'on veut comparer ont des caractéristiques différentes en matière de dépense initiale ou de durée de vie.

IV.1. 1ère alternative incomplète : des dépenses initiales différentes.

Un investissement initial plus important procure souvent à la firme des cash-flows plus importants, donc une VAN plus élevée, sans être forcément pour autant le projet le plus rentable. Pour remédier à ce problème, on définit le critère de la VAN unitaire (VANU) qui rapporte la VAN du projet au montant de l'investissement initial et nous donne ainsi, la VAN par unité monétaire investie :

$$VANU = VAN / I_0$$

A partir du concept de la VANU, on définit comme suit, le concept d'indice de rentabilité ou de profitabilité : (1 + VANU), que l'on peut écrire de manière plus explicite, comme :

$$IR = IP = [\sum_{t=1}^{n} CFN_t / (1 + k)^t] / I_0$$

IV.2. 2e alternative incomplète : des durées de vie différentes.

La résolution de ce problème est possible en ramenant les projets comparés à une même durée de vie théorique. La méthode qui nous permet d'homogénéiser des projets de durées différentes est appelée méthode des revenus annuels équivalents (RAE) ou des annuités équivalentes.

Cette méthode s'inspire de la VAN. Elle détermine pour chaque projet considéré une sorte d'annuité équivalente à la VAN du projet. Le revenu annuel équivalent est par conséquent une répartition uniforme de la VAN sur la durée totale du projet. Les flux monétaires deviennent dès lors comparables, puisqu'ils sont réduits à une base commune d'une année. L'annuité équivalente X se détermine en résolvant l'expression suivante :

$$VAN = [X / (1 + k)] + [X / (1 + k)^2] + ... + [X / (1 + k)^n]$$
$$\Rightarrow \quad X = [VAN.k] / [1 - (1 + k)^{-n}]$$

<u>Principe de décision</u> :

L'entreprise doit réaliser tous les projets indépendants dont le RAE est positif. Si elle a le choix entre plusieurs projets mutuellement exclusifs, elle préférera le projet dont le RAE est le plus élevé.

<u>Remarque</u> :

Dans certains secteurs d'activité, l'étude de la rentabilité d'un investissement peut dépasser les incontournables, délai de récupération et VAN pour inclure d'autres critères spécifiques. On cite à titre d'exemple, le taux d'occupation des chambres ou des salles de restaurant dans les hôtels, la contribution des ventes ou des bénéfices au mètre carré dans la grande distribution…

Applications

Application 1 :

Soit une machine qui a les caractéristiques suivantes : I_0 = 24.500 ; VR_n = 1.000 et n = 6 ans. Calculer les annuités d'amortissement selon :

- la méthode linéaire ;
- la méthode dégressive (coefficient = 2) ;
- la méthode décroissante ;
- la méthode SOYD.

Corrigé :

1°- Amortissement linéaire : Taux = 1 / 6 = 16,67%.

$A_1 = A_2 = ... = A_5$ = (24.500 – 1.000) / 6 = 3.916,667 dinars.

Année	Valeur Comptable Nette (VCN)	Dotations aux amortissements
1	23.500,000	3.916,667
2	19.583,333	3.916,667
3	15.666,667	3.916,667
4	11.750,000	3.916,667
5	7.833,333	3.916,667
6	3.916,667	3.916,667

Amortissement total constaté = 3.916,667 * 6 = 23.500 dinars, la valeur à amortir.

2°- Amortissement dégressif : Taux = 2 * 16,67% = 33,33%.

Année	Valeur Comptable Nette (VCN)	Annuité dégressive	VA / nombre d'années restant
1	23.500,000	7.833,333	~~3.916,667~~
2	15.666,667	5.222,222	~~3.133,333~~
3	10.444,444	3.481,481	~~2.611,111~~
4	6.962,963	2.320,988	~~2.320,988~~
5	4.641,975	~~1.547,325~~	2.320,988
6	2.320,988	-	2.320,988

Le principe avec cette méthode est de commencer par appliquer la méthode d'amortissement dégressif jusqu'à ce que la dotation de l'année devienne inférieure à une dotation linéaire calculée sur la durée de vie restante. Dès que ce résultat est constaté, on bascule vers un amortissement linéaire jusqu'à la fin de la durée de vie du projet, afin que le total amorti corresponde à la valeur à amortir du départ.

Vérification :
7.833,333 + 5.222,222 + 3.481,481 + 2.320,988 + 2.320,988 + 2.320,988 = 23.500 dinars.

3°- Amortissement décroissant : Taux = 1 - $\sqrt[6]{1.000/24.500}$ = 41,32%.

Année	Valeur Comptable Nette (VCN)	Dotations aux amortissements
1	24.500,000	10.123,989
2	14.376,011	5.940,513
3	8.435,498	3.485,750
4	4.949,747	2.045,355
5	2.904,393	1.200,165
6	1.704,228	704,228

Amortissement total constaté :
10.123,989 + 5.940,513 + 3.485,750 + 2.045,355 + 1.200,165 + 704,228 = 23.500 dinars.

4°- Amortissement SOYD : S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21

A_1 = (6 / 21) * 23.500 = 6.714,286
A_2 = (5 / 21) * 23.500 = 5.595,238
A_3 = (4 / 21) * 23.500 = 4.476,190
A_4 = (3 / 21) * 23.500 = 3.357,143
A_5 = (2 / 21) * 23.500 = 2.238,095
A_6 = (1 / 21) * 23.500 = 1.119,048

Amortissement total constaté :
6.714,286 + 5.595,238 + 4.476,190 + 3.357,143 + 2.238,095 + 1.119,048 = 23.500 dinars.

Application 2 :

On considère un projet P nécessitant une dépense initiale de 100 et générant les bénéfices nets annuels sur cinq ans suivants : 20 ; 30 ; 6 ; 15 ; et 3. Calculer le ROI et le TMR de ce projet.

Corrigé :

1°- Bénéfice net annuel moyen = (20 + 30 + 6 + 15 + 3) / 5 = 14,8
⇒ ROI = 14,8 / 100 = 14,8%.

2°- Investissement annuel net moyen = [100 + 2*(80 + 60 + 40 + 20) + 0] / 2*5 = 50
⇒ TMR = 14,8 / 50 = 29,60%.

Application 3 :

On considère un projet P nécessitant une dépense initiale de 100 et générant des cash-flows nets annuels sur trois ans de : 70 ; 40 ; et 20. Calculer le délai de récupération de ce projet.

Corrigé :

Au bout d'une année, la société récupère 70 sur les 100 qu'elle a dépensés au début. Au courant de la 2e année, elle récupère 40. Si on suppose que les cash-flows sont répartis de façon uniforme sur l'année, on trouve que la société récupère 30 au bout de 9 mois. Par conséquent, le délai de récupération du projet est de : 1 an et 9 mois.

<u>Application 4</u> :

On considère une entreprise qui compte acheter une machine d'une valeur de 900, amortissable linéairement sur 3 ans et de valeur résiduelle nulle. L'utilisation de cette machine nécessite une dépense en formation du personnel de 66.

1°- Déterminer le montant de l'investissement initial, sachant que le chiffre d'affaires (CA) généré par le projet sera respectivement de 1.000 ; 1.100 et 1.200 sur les 3 années, que les charges d'exploitation sont estimées à 40% du CA annuel et que le BFR estimé à 10% du CA annuel, doit être financé avec une année d'avance, le solde total des financements étant récupéré à la fin de la durée de vie du projet.
2°- Sachant que la société est imposable à 30% au titre de ses bénéfices et qu'elle utilise un taux d'actualisation de 10%, dire sur la base du critère de la VAN si le projet est ou non rentable.
3°- Calculer le TRI du projet et indiquer la décision qui doit être prise par la société.

<u>Corrigé</u> :

1°- <u>Détermination de l'investissement initial</u> :

I_0 = Coût de la machine + Coût de la formation du personnel + Investissement en BFR :

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
BFR		100	110	120	
Récupération BFR		-	100	110	120
ΔBFR		100	+10	+10	-120
Investissement en BFR	-100	-10	-10	+120	

⇒ $I_0 = 900 + 66 + 100 = 1.066$.

<u>Détermination de l'impôt</u> :

	1	**2**	**3**
CA	1.000	1.100	1.200
CE	400	440	480
Dotations aux amortissements	322	322	322
BAI théorique	278	338	398
Impôt théorique	83,4	101,4	119,4

<u>Détermination des CFN</u> :

	1	**2**	**3**
CA	1.000	1.100	1.200
CE	400	440	480
Investissement en BFR	-10	-10	+120
Impôt théorique	83,4	101,4	119,4
CFN	506,6	548,6	720,6

<u>Calcul de la VAN</u> :

$$VAN = -1.066 + (506,6 / 1,1) + (548,6 / (1,1)^2) + (720,6 / (1,1)^3) = 389,331 > 0$$

⇒ L'entreprise accepte de réaliser le projet.

3°- Détermination du TRI :

Sauf recours aux calculatrices programmables ou aux tableurs, quand les CFN ne sont pas constants, il n'est pas possible d'utiliser les tables financières et il faut procéder par tâtonnement et interpolation linéaire pour calculer le TRI :

$$\text{TRI} = k \;/\; \text{VAN} = 0$$

$$\Rightarrow \quad k \;/ : 1.066 = (506{,}6 / (1 + k)) + (548{,}6 / (1 + k)^2) + (720{,}6 / (1 + k)^3)$$

$$\begin{cases} \text{Pour } k = 25\% & \Rightarrow \quad \text{VAN} = +59{,}331 > 0 \\ \text{Pour } k = 30\% & \Rightarrow \quad \text{VAN} = -23{,}700 < 0 \end{cases}$$

Donc, le taux qui annule la VAN se situe nécessairement entre 25% et 30% :

$$\begin{cases} \text{Pour } 25\% & \Rightarrow \quad \text{VAN} = +59{,}331 \\ \text{Pour } k & \Rightarrow \quad \text{VAN} = 0 \\ \text{Pour } 30\% & \Rightarrow \quad \text{VAN} = -23{,}700 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (30\% - 25\%) & \Rightarrow \quad -23{,}700 - 59{,}331 \\ (k - 25\%) & \Rightarrow \quad 0 - 59{,}331 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\% & \Rightarrow \quad -83{,}031 \\ (k - 25\%) & \Rightarrow \quad -59{,}331 \end{cases}$$

Le recours à la règle de 3 permet d'obtenir k = 28,57% > 10%, donc l'entreprise accepte d'acheter la machine.

Remarque :

Les calculs exacts (par le recours au tableur Excel) donnent 28,51%. Les résultats obtenus par interpolation linéaire sont d'autant plus précis que les bornes considérées pour k sont proches.

Application 5 :

On considère un projet qui nécessite un investissement initial de 1.000 et qui génère sur 3 ans, des cash-flows nets de 6.000 ; -11.000 et 6.000.

Calculer le TRI du projet et indiquer la décision à prendre, sachant que le taux de rentabilité minimum exigé est de 14%.

Corrigé :

Le calcul du TRI du projet aboutit à 3 solutions différentes : 0% ; 100% et 200% ! Le 1^{er} s'il est retenu doit aboutir à une décision de rejet du projet et les deux suivants à une décision d'acceptation… Ce dilemme est résolu par le recours au TRII.

Application 6 :

On considère un projet qui nécessite une dépense initiale de 100 et qui génère les cash-flows annuels sur trois ans suivants : 40 ; 30 ; et 50. On suppose que les cash-flows sont réinvestis à un taux de 10%, constant sur la durée du projet et que le taux d'actualisation est de 12%.

1°- Calculer le taux de rendement interne et le taux de rendement interne intégré du projet.
2°- Calculer la valeur actuelle nette et la valeur actuelle nette intégrée du projet.

Corrigé :

1°- Calcul du TRI et du TIRI :

$$\text{TIR} = k / : 100 = [40 / (1 + k)] + [30 / (1 + k)^2] + [50 / (1 + k)^3] \quad \Rightarrow k = 9{,}30\% < 12\%$$
$$\text{TIRI} = k / : 100 = [40.(1{,}1)^2 + 30.(1{,}1) + 50] / (1 + k)^3 \quad \Rightarrow k = 9{,}53\% < 12\%$$

Les deux taux indiquent que la société doit refuser le projet. On remarque cependant, que le TIRI est plus élevé que le TRI. Ceci est naturel, car le marché offre un taux de réinvestissement supérieur au taux de rendement interne.

2°- Calcul de la VAN et de la VANI :

$$\text{VAN} = -100 + 40 / (1{,}12\%) + 30 / (1{,}12\%)^2 + 50 / (1{,}12\%)^3 = -4{,}78 < 0$$
$$\text{VANI} = -100 + [40.(1{,}10\%)^2 + 30.(1{,}10\%) + 50] / (1{,}12\%)^3 = -6{,}472 < 0$$

La société doit refuser le projet. On remarque par ailleurs, que la VANI est inférieure à la VAN. Ce résultat est prévisible, car le taux de réinvestissement est inférieur au taux d'actualisation.

Application 7 :

On considère une firme qui a le choix entre 2 projets qui ont les caractéristiques suivantes :

	Projet 1	**Projet 2**
I_0	450	375
CFN_1	200	250
CFN_2	280	380
CFN_3	370	460
CFN_4	450	-

Comparer ces deux projets selon le critère de la VAN puis selon le critère du RAE, en supposant que le taux d'actualisation est de 12%.

Corrigé :

1°- Calcul de la VAN :

$$VAN_1 = -450 + 200 / (1{,}12) + 280 / (1{,}12)^2 + 370 / (1{,}12)^3 + 450 / (1{,}12)^4 = 501{,}128.$$
$$VAN_2 = -375 + 250 / (1{,}12) + 380 / (1{,}12)^2 + 460 / (1{,}12)^3 = 478{,}567.$$

D'après le critère de la VAN, la société S devrait préférer le 1er projet au 2nd.

2°- Calcul du RAE :

$$RAE_1 = 501{,}128.12\% / [1 - (1{,}12)^{-4}] = 164{,}988.$$
$$RAE_2 = 478{,}567.12\% / [1 - (1{,}12)^{-3}] = 199{,}251.$$

En retenant le critère du revenu annuel équivalent, il s'avère que c'est plutôt le projet 2 qui est préférable.

CHAPITRE N° 2

LES DECISIONS D'INVESTISSEMENT EN SITUATION DE RISQUE ET D'INCERTITUDE

I. Les notions d'incertitude et de risque.

I.1. Définitions.

L'incertitude qualifie les situations où l'agent économique doit prendre des décisions dont les conséquences dépendent de facteurs exogènes aléatoires. En matière de choix d'investissement, l'incertitude qui pèse sur les cash-flows futurs peut avoir des origines très variées telles que par exemple l'évolution des prix de vente, des coûts de production, de la part de marché de l'entreprise par rapport à celle de ses concurrents…

L'incertitude se transforme en risque lorsqu'il est possible de la quantifier, notamment par l'assignation d'une distribution de probabilités aux différents événements possibles. Ces probabilités peuvent être soit objectives soit subjectives :

- les probabilités objectives sont celles qui peuvent être assignées à des événements qui ont un caractère répétitif. A titre d'exemple, la probabilité de tirer une boule noire d'une urne qui en contient une noire et une blanche est indiscutablement de 50% ;
- celles subjectives sont par contre, estimées par le décideur lui-même en fonction de sa personnalité, de son caractère optimiste ou pessimiste, de son humeur… et varient donc nécessairement d'un individu à un autre, voire pour un même individu, d'un moment à un autre… En période d'euphorie boursière par exemple, les agents économiques ont tendance à ne plus repérer correctement les titres risqués et inversement en période de crise, ils se défient de toutes les valeurs quelles qu'elles soient… Ainsi, les mêmes conséquences se verraient attribuer des probabilités différentes en fonction de l'état de l'individu au moment de la prise de décision.

Bien que la possibilité d'affecter aux différents événements possibles des probabilités subjectives pour résoudre les décisions d'investissement en avenir incertain, entraîne souvent dans la littérature économique l'abandon de la distinction entre risque et incertitude, nous garderons dans le cadre de ce chapitre cette distinction au niveau des méthodes de choix d'investissement mais nous parlerons d'une manière générale, du risque d'une activité ou d'un projet d'investissement.

I.2. L'attitude des investisseurs face au risque.

Les investisseurs ne sont généralement pas indifférents à la présence d'incertitude. Pour la plupart, ils sont par nature averses au risque et n'acceptent d'investir que dans des projets qu'ils jugent susceptibles de les compenser du risque encouru ; la rentabilité qu'ils exigent *a priori* est une fonction croissante du risque encouru. Le supplément de rentabilité exigé par rapport à un investissement sans risque, s'appelle prime de risque.

L'objet de ce chapitre, est d'examiner la manière avec laquelle on peut intégrer le risque dans la décision d'investissement. Pour cela, différentes méthodes existent ; certaines se placent dans un environnement incertain, d'autres dans un environnement risqué.

II. Choix d'investissement en avenir incertain : les méthodes traditionnelles.

Les méthodes traditionnelles de traitement du risque, sont au nombre de deux :

- les méthodes basées sur le taux d'actualisation ;
- et les méthodes basées sur la notion d'équivalent certain.

II.1. Les méthodes basées sur le taux d'actualisation.

II.1.1. La méthode du taux d'actualisation simple.

Il est très aisé de voir que la VAN d'un projet dépend directement du taux d'actualisation choisi : plus le taux est faible, plus la VAN est élevée. Ainsi, prendre en compte le risque d'un projet, revient à faire varier le taux d'actualisation avec le degré de risque : plus un projet est risqué, plus le taux d'actualisation choisi au départ, devrait être élevé.

Exemple :

Soit un projet qui nécessite une dépense initiale de 20.000 et qui génère un cash-flow de 9.000, sur trois ans.

Si $k = 10\%$ $\Rightarrow$ VAN $= -20.000 + 9.000.[(1,1^{-1}) + (1,1^{-2}) + (1,1^{-3})] = 2.381 > 0$: acceptation
Si $k = 18\%$ $\Rightarrow$ VAN $= -20.000 + 9.000.[(1,18^{-1}) + (1,18^{-2}) + (1,18^{-3})] = -431 < 0$: rejet

Si reconnaître le lien entre taux d'actualisation et risque permet de tenir compte de ce dernier, il n'en reste pas moins, que le choix d'un taux en particulier souffre d'arbitraire… Dans l'exemple ci-dessus, opter pour un taux de 10% sur un projet très risqué, revient à adopter un projet qui s'avèrera finalement déficitaire et opter pour un taux de 18% sur un projet peu risqué, revient à passer à côté d'un projet rentable, par excès de prudence…

Pour atténuer cet inconvénient, certaines entreprises classent leurs investissements en catégories de risque, et assignent à chaque classe un taux d'actualisation différent :

- la classe supérieure comprend des projets risqués tels que les investissements dans des produits nouveaux ; on accorde à cette classe, un taux d'actualisation élevé ;
- la classe moyenne comprend les investissements « normalement » risqués tels que les investissements dans des produits existants ; le taux d'actualisation affecté à cette classe, est moyennement élevé ;
- enfin, la classe inférieure comprend les investissements les moins risqués tels que les projets d'extension, qui ont un taux d'actualisation faible, proche du taux sans risque.

II.1.2. La méthode du taux d'actualisation ajusté.

La méthode du taux d'actualisation simple échoue à affecter à chaque projet d'investissement <u>le</u> taux d'actualisation qui tient compte exactement du degré de risque du projet. Pour y remédier, les décideurs ont pensé recourir aux développements faits dans le cadre de la théorie financière moderne, notamment ceux liés au Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers (MEDAF), qui détermine la rentabilité exigée par un agent pour investir dans un titre donné.

Soient :

- R_F = le taux de rendement sans risque (généralement, le rendement des bons du Trésor à long terme)
- R_i = le rendement exigé par l'investisseur pour investir dans l'action i
- R_M = le rendement du marché boursier

D'après le MEDAF, la rentabilité exigée par l'investisseur est la suivante :

$$R_i = R_F + \beta_i.(R_M - R_F)$$

Cette équation d'équilibre signifie que l'investisseur exige un rendement au moins égal à celui d'un placement sans risque (R_F), majoré d'une prime de risque $\beta_i.(R_M - R_F)$ qui dépend de l'excédent moyen de rendement du marché actions sur le marché des obligations d'Etat (R_M - R_F) multiplié par un coefficient qui mesure le degré de risque de l'action considérée par rapport au marché.

Le coefficient β_i, appelé volatilité du titre i, mesure le degré de variabilité des rendements du titre i par rapport à celle du marché :

$$\beta_i = Cov(R_i, R_M) / Var(R_M)$$

Et s'interprète selon que sa valeur est inférieure ou supérieure à l'unité :

- si $\beta_i < 1$: l'investissement est moins risqué que le marché (titre défensif) ;
- si $\beta_i > 1$: l'investissement est plus risqué que le marché (titre offensif).

L'avantage de cette méthode par rapport à la précédente est qu'elle quantifie de manière précise le taux de rentabilité exigé sur chaque investissement et ne souffre plus d'arbitraire.

II.2. L'approche de l'équivalence de certitude.

La méthode de l'équivalent certain, découle directement du concept de la théorie de l'utilité : face au risque, l'investisseur doit spécifier quelle somme lui procurerait exactement la même satisfaction que la valeur espérée d'une somme risquée.

Selon les partisans de cette approche, le taux d'actualisation doit être interprété comme un taux net de tout risque et ce sont les cash-flows (présents au numérateur de la VAN) qui doivent intégrer l'ajustement par rapport au risque :

$$VAN = \sum_{t=0}^{n} [(\alpha_t.CFN_t) / (1 + R_F)^t]$$

où :

- α_t = le coefficient d'équivalence de certitude / $0 < \alpha_t < 1$. α_t est déterminé par l'échelle des préférences des utilités de l'investisseur, par référence à son degré d'aversion au risque
- R_F = le taux net du risque (constant dans le temps)

Dans cette conception, α_t devrait varier dans le sens inverse que le degré du risque : plus un cash-flow est risqué, plus son coefficient d'équivalence de certitude sera faible, ce qui revient à minorer les flux futurs et par conséquent la VAN sur les projets jugés les plus risqués.

II.3. Confrontation de la méthode du taux ajusté et de la méthode de l'équivalence de certitude.

Bien que la méthode du taux ajusté ne soit tout à fait exempte d'arbitraire et que celle de l'équivalence de certitude soit totalement subjective, cette dernière est jugée théoriquement supérieure. Ce résultat est démontré par Robichek et Meyers (1966), qui considèrent une situation dans laquelle le taux d'actualisation ajusté selon le risque (R_i) et le taux sans risque (R_F), sont constants dans le temps.

Si les deux méthodes étaient équivalentes, elles devraient aboutir à la même VAN et plus précisément aux mêmes CFN sur chaque période.

En t, cela donnerait :

$$\alpha_t . CFN_t / (1 + R_F)^t = CFN_t / (1 + R_i)^t$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_t = (1 + R_F)^t / (1 + R_i)^t$$

De même, en t+1, on aurait :

$$\alpha_{t+1} = (1 + R_F)^{t+1} / (1 + R_i)^{t+1}$$

Etant donné que $R_F < R_i$ (le taux sans risque étant toujours inférieur à tout autre taux risqué), on peut en déduire que :

$$[(1 + R_F) / (1 + R_i)]^{t+1} < [(1 + R_F) / (1 + R_i)]^t$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{t+1} < \alpha_t$$

Cette situation révèle un paradoxe : nous partons d'un taux d'actualisation ajusté par rapport au risque supposé constant, et nous aboutissons pourtant, à un résultat qui prouve que les coefficients d'équivalence avec le risque sont décroissants dans le temps (et non pas constants), ce qui signifie que le risque est croissant (et non constant), dans le temps. La méthode du taux d'actualisation ajusté, échoue donc, à tenir compte convenablement de l'évolution du risque dans le temps, ce qui permet de conclure à la supériorité théorique de l'approche par les équivalents certains.

III. Choix d'investissement en avenir risqué.

La résolution des problèmes de choix d'investissement en avenir risqué se fait par le recours :

- soit aux méthodes probabilistes ;
- soit aux arbres de décision.

III.1. Les méthodes probabilistes.

En avenir risqué, les cash-flows futurs éventuels sont associés à des probabilités de réalisation, formant des distributions de probabilités qui permettent de disposer de plusieurs critères de mesure de la rentabilité et du risque d'un projet. Classiquement, on calcule l'espérance mathématique et l'écart type (ou la variance) de la VAN. On peut également calculer à partir de ces deux indicateurs, un critère synthétique, appelé coefficient de variation.

III.1.1. L'espérance mathématique.

L'espérance mathématique de la VAN se définit de la manière suivante :

$$E(VAN) = -I_o + \left[\sum_{t=1}^{n} E(CFN_t) / (1 + k)^t\right]$$

Elle mesure la VAN espérée du projet, c'est-à-dire la richesse moyenne qu'il devrait procurer à l'entreprise. Si elle est positive, le projet devrait être adopté sinon il devrait être rejeté.

Outre le fait, que la moyenne ne prend tout son sens que si le projet venait à être réalisé plusieurs fois, elle souffre de plusieurs limites qui en font un critère insuffisant en matière de prise de décision en avenir aléatoire, comme le démontre Daniel Bernouilli (1738), à travers les deux exemples ci-dessous :

1er exemple : la notion de risque.

On considère les deux projets suivants :

$$p_1 \begin{cases} 2.000 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad p_2 \begin{cases} -1.000 & \frac{1}{2} \\ 3.000 & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $E(p_1) = 1.000$ et $E(p_2) = 1.000$

Cet exemple montre bien, que le critère de l'espérance mathématique du gain est insuffisant : pour une même espérance de gains, plusieurs investisseurs préféreront le projet p_1 au projet p_2, et ne seront donc pas du tout indifférents entre les deux. Cette attitude traduit tout simplement, leur aversion vis-à-vis du risque : il vaut mieux ne rien gagner dans le pire des cas que de perdre.

2^e exemple : le paradoxe de St-Péterbourg.

On demande à un joueur, combien il serait prêt à payer pour participer au jeu suivant : on jette une pièce en l'air autant de fois qu'il faut pour que face sorte. Si le nombre de jets nécessaires est n, le joueur recevra 2^n unités monétaires (u.m.).

Calcul de l'espérance mathématique de ce jeu :

$$\begin{cases} \text{Si face apparaît à la } 1^{\text{ère}} \text{ fois} : & \text{gain} = 2^1 \text{ u.m.} & \text{probabilité} = (1/2)^1 \\ \text{Si face apparaît à la } 2^{\text{e}} \text{ fois} : & \text{gain} = 2^2 \text{ u.m.} & \text{probabilité} = (1/2)^2 \\ \ldots\ldots & & \\ \text{Si face apparaît à la } n^{\text{e}} \text{ fois} : & \text{gain} = 2^n \text{ u.m.} & \text{probabilité} = (1/2)^n \\ \ldots\ldots & & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E(\text{gain}) = 1/2.2 + (1/2)^2.2^2 + \ldots. + (1/2)^n.2^n + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots. + 1 + \ldots. = +\infty$$

Si les décisions des joueurs se prenaient sur la base de l'espérance mathématique, plusieurs devraient être tentés par le jeu ci-dessus. Mieux encore, plus le gain espéré d'un jeu est important, plus normalement ils sont prêts à y risquer des sommes importantes. Pourtant on devine aisément que personne n'est prêt à engager sa fortune dans le jeu ci-dessus.

Ces deux exemples permettent de conclure que le critère de l'espérance mathématique souffre de deux défauts : il ignore totalement la notion de risque et il ne traduit pas correctement les préférences des individus.

III.1.2. L'écart type.

Le risque d'une distribution de probabilités se mesure traditionnellement par l'écart type (σ) ou la variance (V). En matière de choix d'investissement, il donne une indication sur le degré de variation des cash-flows :

$$V(VAN) = [\sum_{t=1}^{n} V(CFN_t) / (1 + k)^{2t}] + [\sum_{\substack{t=1 \\ t \neq t'}}^{n} \sum_{t'=1}^{n} Cov(CFN_t, CFN_{t'}) / (1 + k)^{t+t'}]$$

Cette formule se simplifie dans les deux cas particuliers suivants :

- les cash-flows nets sont indépendants :

$$\sigma(VAN) = [\sum_{t=1}^{n} (V(CFN_t) / (1 + k)^{2t})]^{1/2}$$

- les cash-flows nets sont parfaitement et positivement corrélés :

$$\sigma(VAN) = \sum_{t=1}^{n} [\sigma(CFN_t) / (1 + k)^t]$$

III.1.3. Le coefficient de variation.

On définit le coefficient de variation CV(VAN) par :

$$CV(VAN) = \sigma(VAN) / E(VAN)$$

Le coefficient de variation mesure la dispersion relative de la distribution des probabilités ; il constitue ainsi, une mesure relative du degré de risque d'activité. En matière de comparaison de projets, le coefficient de variation et l'écart type aboutissent au même résultat quand on considère 2 projets avec la même espérance de VAN.

Ce critère est parfois préféré à l'écart type car il présente l'avantage de ne pas comporter d'unité de mesure et donc de permettre des comparaisons entre des séries de données d'unités différentes. Il pose par contre deux problèmes :

- quand la moyenne est proche de zéro, il tend vers l'infini et devient très sensible aux légères variations de la moyenne ;
- quand on compare deux projets avec des espérances mathématiques différentes, un coefficient de variation plus élevé ne provient pas nécessairement d'un risque absolu plus élevé : il suffit que la moyenne soit plus faible…

III.2. La méthode des arbres de décision.

Le modèle des arbres de décision est le modèle le plus complet en matière de décision d'investissement face au risque, car il permet de tenir compte du fait que la décision d'investissement peut être étalée dans le temps et qu'à mesure qu'un projet évolue, l'investisseur peut être amené à le développer, le modifier ou à l'arrêter…

Ainsi, à long terme, les investissements de l'entreprise apparaissent comme une suite de décisions dépendantes les unes des autres qui sont fonction de la demande future et la prise de décision s'ordonne par conséquent, fréquemment, selon un processus séquentiel que l'on peut schématiser par des arbres de décision.

III.2.1. Elaboration de l'arbre de décision.

Tout arbre de décision se compose de branches et de nœuds :

- chaque nœud indique soit le moment d'une prise de décision (nœud décisionnel), soit celui de l'avènement d'un état de la nature (nœud événementiel) ;
- chaque branche représente les différentes lignes d'action possibles résultant d'une décision ou les différents états de la nature susceptibles d'affecter les conséquences des décisions. Chaque état de la nature est défini par un cash-flow net possible et sa probabilité d'occurrence.

III.2.2. Résolution du problème de l'arbre de décision.

La résolution du problème représenté par un arbre de décision se fait en autant d'étapes qu'il n'y a de nœuds décisionnels ou événementiels. Pour cela, il faut à chaque fois, calculer les différentes E(VAN) liées aux différents nœuds et n'en garder que la plus élevée au niveau d'un même nœud, puis réitérer ce processus autant de fois que nécessaires, jusqu'à l'atteinte du premier nœud de décision. Si la VAN espérée obtenue est positive, le projet est accepté sinon, il est rejeté. On remarquera pour terminer, que si le critère utilisé est l'espérance mathématique, cette technique ne permettra pas de tenir compte du risque.

Applications

Application 1 :

1°- On considère un projet p_1 de bêta 1,2. Sachant que le taux sans risque est de 6% et que le marché offre une rémunération de 13%, calculer le taux de rentabilité minimal que doit offrir le projet pour être acceptable.
2°- L'investisseur accepte de financer en plus du projet p_1, un second projet p_2 d'un bêta de 1,5. En supposant que cet investisseur répartit ses fonds à raison de 70% sur le projet p_1 et de 30% sur le projet p_2, quel est le risque global qu'il court et quelle est la rentabilité minimale qu'il exigera désormais ? Interpréter.

Corrigé :

1°- Etant donné le risque du projet p_1, sa rentabilité minimale est déterminée par :

$$\begin{aligned} R_1 &= R_F + \beta_1.(R_M - R_F) \\ &= 0{,}06 + 1{,}2*(0{,}13 - 0{,}06) = 14{,}40\% \end{aligned}$$

Ainsi, l'investisseur n'acceptera de financer ce projet d'investissement, que si son taux de rendement est au moins de 14,40%.

2°- Le projet p_2, au vu de son degré de risque, doit lui offrir une rentabilité de :

$$R_2 = 0{,}06 + 1{,}5*(0{,}13 - 0{,}06) = 16{,}50\%$$

Si l'investisseur répartit ses fonds à raison de 70% sur le projet p_1 et de 30% sur le projet p_2, le β moyen, sera de :

$$\beta = 0{,}7*1{,}2 + 0{,}3*1{,}5 = 1{,}29$$

Dans ce cas, le rendement moyen exigé par l'investisseur sera :

$$R = 0{,}06 + 1{,}29*(0{,}13 - 0{,}06) = 70\%*14{,}40\% + 30\%*16{,}50\% = 15{,}03\%$$

<u>Interprétation des résultats</u> :

Le premier projet dans lequel se lance cette entreprise, lui rapporte 14,40%. Si elle décide d'investir également dans le second projet, le rendement qu'elle exigera ne sera plus de 14,40% mais de 15,03%, car le second projet est plus risqué que le premier ($\beta_2 > \beta_1$). Ceci signifie que le taux d'actualisation qu'elle affectera à l'ensemble de ses projets, est 15,03%, alors qu'elle affectait au premier le taux de 14,40%. Ce second taux, est le taux ajusté qui tient compte de l'augmentation du risque au sein de l'entreprise.

<u>Application 2</u> :

Considérons un projet d'investissement qui nécessite une dépense initiale de 10.000 et qui génère chaque année 5.000, durant trois ans. Le taux net du risque est de 4%, mais on s'attend à ce que le risque augmente avec le temps, de sorte que nous ayons les coefficients d'équivalence de certitude suivants : $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = 0,9$; $\alpha_2 = 0,8$; et $\alpha_3 = 0,7$. Calculer la VAN de ce projet.

<u>Corrigé</u> :

$$VAN = -10.000*1 + 0,9*5.000 / (1 + 4\%)^1 + 0,8*5.000 / 1,04^2 + 0,7*5.000 / 1,04^3 = 1137$$

Cette VAN aurait été de 3.875 si l'investisseur n'avait pas tenu compte de son aversion pour le risque à travers les α_t. Avec un agent plus averse au risque qui aurait eu des coefficients d'équivalence de certitude plus faibles, la VAN du même projet aurait pu être carrément négative et le projet aurait rejeté par cet investisseur.

<u>Application 3</u> :

On considère un projet d'investissement nécessitant une dépense initiale de 5.000 dinars et ayant une durée de vie de 2 ans.

La distribution des CFN en situation d'indépendance totale est la suivante :

Année 1		**Année 2**	
CFN_1	**Probabilités**	**CFN_2**	**Probabilités**
2.500	0,3	3.000	0,3
5.000	0,4	6.000	0,5
7.500	0,3	8.500	0,2

Sachant que le taux d'actualisation est de 10% :

1°- Calculer l'espérance et l'écart type de la VAN.
2°- En déduire la probabilité que la VAN soit négative, en supposant que cette dernière suive une loi normale.

<u>Corrigé</u> :

1°- <u>Calcul de l'espérance et de l'écart type de la VAN</u>.

$$E(CFN_1) = 5.000$$
$$E(CFN_2) = 5.600$$
$$\Rightarrow \quad E(VAN) = -5.000 + (5.000 / 1,1) + (5.600 / 1.1^2) = 4.173,553$$

$$\sigma(CFN_1) = [(2.500 - 5.000)^2*0,3 + (5.000 - 5.000)^2*0,4 + (7.500 - 5.000)^2*0,3]^{1/2}$$
$$= (3.750.000)^{1/2} = 1.936,491$$
$$\sigma(CFN_2) = [(3.000 - 5.600)^2*0,3 + (6.000 - 5.600)^2*0,5 + (8.500 - 5.600)^2*0,2]^{1/2}$$
$$= (3.790.000)^{1/2} = 1.946,792$$
$$\Rightarrow \quad \sigma(VAN) = [3.750.000 / (1,1)^2 + 3.790.000 / (1,1)^4]^{1/2} = 2.384,910$$

2°- Calcul de la probabilité P(VAN < 0).

On posant t = [VAN - E(VAN)] / σ(VAN) pour centrer et réduire la variable, on obtient :

$$P(VAN \leq 0) = P[t \leq (0 - 4.173,533) / 2.384,910]$$
$$= P(t \leq -1,75) = P(t > 1,75)$$
$$= 1 - P(t < 1,75) \approx 1 - 0,96 \approx 4\%$$

Conclusion, le risque que le projet ne soit pas rentable est de 4%. En général, les investisseurs fixent un seuil de référence sur la base duquel ils acceptent ou rejettent un projet donné.

Application 4 :

Soient deux projets A et B, caractérisés par les distributions de probabilités suivantes de leur VAN :

Projet A		Projet B	
VAN	**Probabilité**	**VAN**	**Probabilité**
2.000	10%	2.000	10%
3.000	30%	2.500	20%
3.500	25%	3.000	40%
4.000	20%	5.000	20%
4.500	15%	5.500	10%

1°- Calculer l'espérance et la variance de ces deux projets, et indiquer celui à retenir.
2°- Indiquer ce que devient cette décision, sur la base du coefficient de variation.

Corrigé :

1°- Projet A : $E(VAN_A) = 10\%*2.000 + 30\%*3.000 + ... + 15\%*4.500 = 3.450$
$V(VAN_A) = 10\%*2.000^2 + 30\%*3.000^2 + ... + 15\%*4.500^2 - 3450^2 = (705)^2$

Projet B : $E(VAN_B) = 3.450$
$V(VAN_B) = (1.171)^2$

Etant donné deux projets qui ont la même espérance, on choisit celui qui a l'écart type le moins élevé, donc, le projet A dans le cas présent.

2°- $CV_A = \sigma(VAN_A) / E(VAN_A) = 705 / 3450 = 0,20$.
$CV_B = \sigma(VAN_B) / E(VAN_B) = 1171 / 3450 = 0,34$.

Les 2 projets présentant une espérance de VAN identique, la décision est inchangée.

Application 5 :

La société South Tunisia Oil (STO) vient d'acquérir pour 8 millions de dinars et une durée de 10 ans, des droits de forage sur un terrain qui se situe au sud de la Tunisie. Pour mieux connaître ses chances de trouver du pétrole dans le sous-sol du terrain, la société hésite à réaliser un test séismique. Les études préliminaires, révèlent que le test séismique, coûte 16 millions de dinars et a autant de chances de réussir que d'échouer. Quant au forage, son coût est estimé à 56 millions de dinars, et il permettra à la société de dégager un revenu de 200 millions de dinars, au cas où elle trouverait du pétrole.

Dans le cas où la société n'effectue pas le test, des études géologiques faites par des experts, montrent que la probabilité de trouver *a priori* du pétrole est de 55%. Dans le cas inverse, la probabilité de trouver du pétrole est conditionnée par les résultats du test :

- si le test réussit, la probabilité de trouver du pétrole est de 90% ;
- s'il échoue, cette probabilité tombe à 20%.

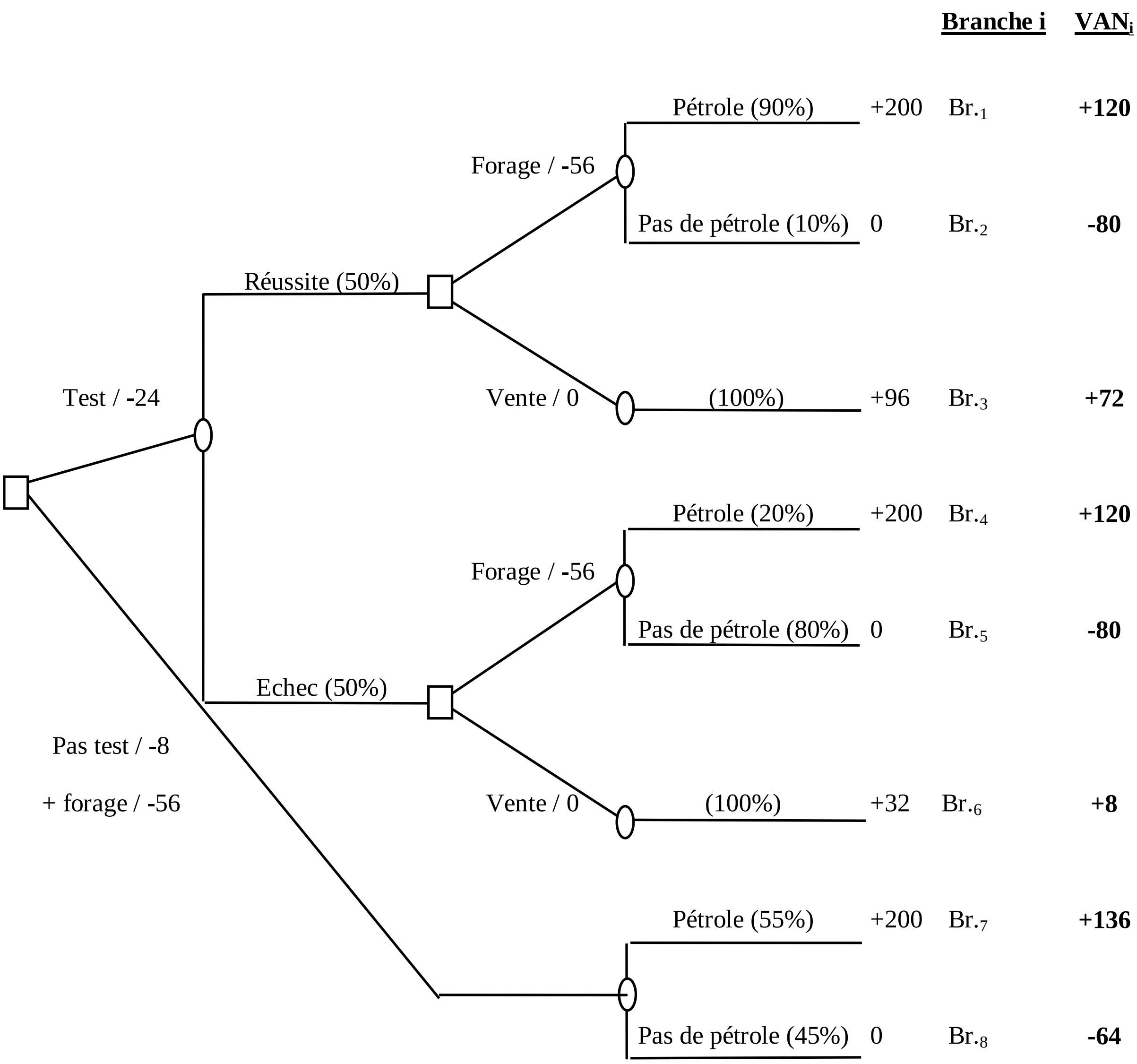
Si au lieu de faire le forage elle-même et de courir ainsi, le risque de ne pas trouver du pétrole, la société STO choisit de revendre ses droits sur le terrain, le prix de cette vente serait de :

- 96 millions de dinars si le test est positif ;
- 32 millions de dinars, si le test est négatif.

1°- En considérant que toutes les données sont actualisées, schématiser par un arbre de décision, les séquences décisionnelles et les états de la nature auxquels est confrontée STO, en indiquant les cash-flows nets y afférents et les probabilités correspondantes.
2°- Déterminer la décision optimale qui doit être prise par la société sur la base du critère de la VAN espérée. Commenter.
3°- On suppose que STO ignore la probabilité de réussite du test séismique. Quelle devrait être cette probabilité pour que la société prenne la même décision que dans la question précédente ?

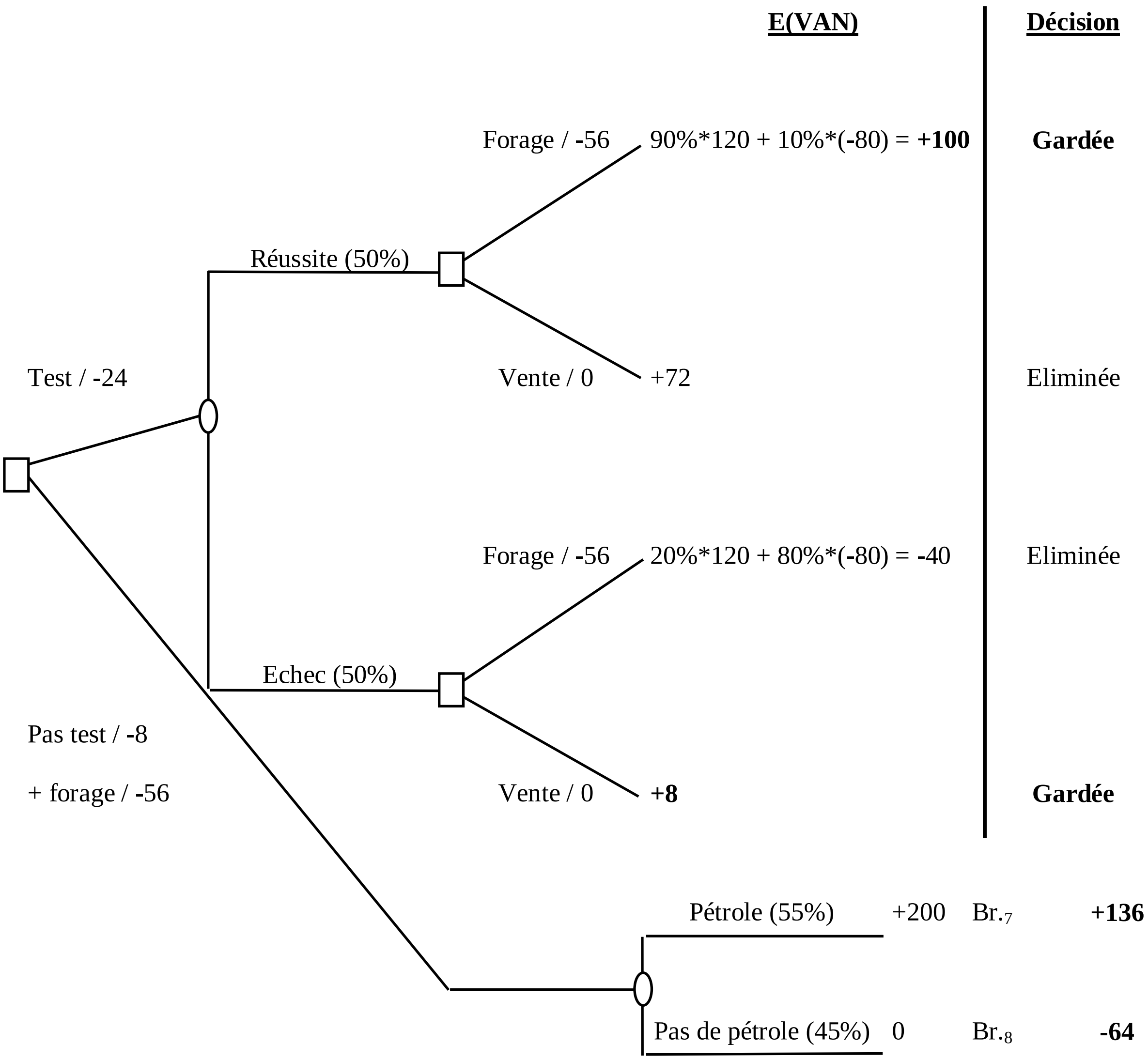
Corrigé :

1°- Représentation de l'arbre de décision.

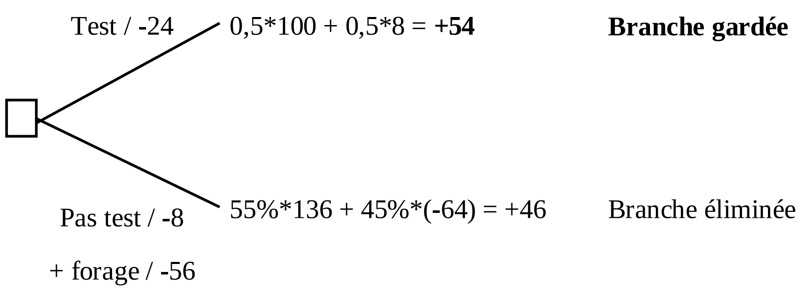


2°- Calcul des VAN espérées.

1/ Derniers nœuds décisionnels :



2/ Premier nœud décisionnel :



Conclusion :

La société STO a intérêt dans tous les cas à réaliser le test séismique. Si par la suite :

- le test réussit, elle effectue le forage ;
- si par contre, le test échoue, elle vend ses droits à une autre société.

Notons toutefois, qu'en pratique, la VAN du projet ne sera de +54 que si la société répète le projet un nombre important de fois. Si tel n'est pas le cas, le gain réel sera selon le cas de +120 ; -80 ou de +8.

3°- Calcul de la probabilité minimale de réussite du test.

Soit p la probabilité de réussite du test et (1 - p) la probabilité de son échec.

La société maintiendra sa décision, si et seulement si :

$$100 * p + 8 * (1 - p) > 46$$

$$\Rightarrow \quad p > 41{,}30\%$$

CHAPITRE N° 3

LE CHOIX D'INVESTISSEMENT EN AVENIR ALEATOIRE ET LA FONCTION D'UTILITE

I. Introduction à la théorie des décisions individuelles.

I.1. Présentation du cadre théorique.

Dans un environnement incertain, l'incertitude peut provenir de deux sources :

- la première, est liée à l'existence d'autres agents dont les décisions peuvent avoir un impact sur les conséquences des décisions prises par l'agent ou l'investisseur considéré. A titre d'exemple, les résultats d'une entreprise qui n'est pas en situation de monopole dépendent des conséquences des décisions prises par les entreprises concurrentes sur le marché. L'existence de telles interactions, fait qu'aucun investisseur ne connaît avec certitude et à l'avance, les conséquences de ses propres choix du moins, tant qu'il ignore les choix faits par les autres... Le traitement de cette forme d'incertitude se fait dans le cadre de la théorie des jeux : dans ce cas, chaque investisseur « joue » contre un adversaire ;
- la seconde source d'incertitude est souvent exogène aux investisseurs dans ce sens où elle n'est contrôlée par aucun d'entre eux et dépend simplement du pur hasard. Le traitement de cette forme d'incertitude se fait dans le cadre de la théorie des décisions individuelles : l'investisseur « joue » dans ce cas, contre la nature…

La résolution des problèmes de choix d'investissement en avenir incertain se fait dans le cadre de la théorie des décisions individuelles, qui nécessite la définition :

- d'une part, de la liste des décisions qui s'offrent à l'investisseur. Dans le langage de la théorie des décisions individuelles, ces décisions sont appelées lignes d'actions. Appliquées au domaine du choix d'investissement, elles consistent pour l'agent à choisir entre les trois actions suivantes : investir, désinvestir ou ne rien faire ;
- et d'autre part, l'ensemble des événements qui risquent de prévaloir au moment où les actes de l'investisseur devront porter leurs effets. Dans le langage de la théorie des décisions individuelles, ces événements sont appelés états de la nature et sont supposés être parfaitement définis (même si on ne sait pas lequel d'entre eux va se réaliser), mutuellement exclusifs et collectivement exhaustifs.

I.2. La fonction d'utilité et les axiomes de rationalité.

Nous avons montré dans le chapitre 2, comment les investisseurs étaient sensibles non seulement au rendement (mesuré par la richesse espérée), mais également au risque (mesuré par l'écart type). La théorie des décisions individuelles permet de tenir compte simultanément de ces deux critères à travers l'attribution à chaque investisseur rationnel, d'une fonction qui traduit ses préférences en matière de rendement et de risque, appelée fonction d'utilité.

La qualité d'investisseur rationnel n'est attribuée à un investisseur que s'il vérifie toute une série de règles comportementales résumées en un certain nombre d'axiomes, dits axiomes de rationalité et dont les principaux sont les suivants :

<u>Axiome 1 : Axiome de complétude.</u>

Placé devant un choix risqué (souvent appelé loterie), l'investisseur est toujours capable de décider :

- il préfère la loterie l_1 à la loterie l_2 si la $1^{ère}$ lui procure davantage de satisfaction ; on note : $l_1 \succ l_2$;
- il préfère la loterie l_2 à la loterie l_1 si la 2^{nde} lui procure davantage de satisfaction ; on note : $l_2 \succ l_1$;
- il est indifférent entre l_1 et l_2 si les deux loteries lui procurent la même satisfaction ; on note : $l_1 \equiv l_2$ ou $l_1 \sim l_2$.

<u>Axiome 2 : Axiome de transitivité.</u>

Les relations de préférence de l'investisseur sont transitives :

Si $l_1 \succ l_2$ et $l_2 \succ l_3$
alors $l_1 \succ l_3$

<u>Axiome 3 : Axiome de non-satiété.</u>

Les investisseurs préfèrent toujours plus de richesse à moins de richesse.

<u>Axiome 4 : Axiome de continuité des préférences.</u>

Si on a trois loteries l_1, l_2, et l_3, telles que $l_1 \succ l_2$ et $l_2 \succ l_3$, alors il $\exists$ une probabilité p, telle que :

$$l_2 \equiv p.l_1 + (1 - p).l_3$$

Le symbole $\equiv$ désigne le fait que l'agent est indifférent entre jouer à l_2, une loterie certaine, ou à une combinaison de l_1 et l_3, du moment qu'elles lui procurent toutes les deux la même satisfaction. On en déduit qu'il existe pour toute loterie, une somme de monnaie, appelée équivalent certain, telle que l'agent est indifférent entre jouer à la loterie ou recevoir son équivalent certain, ce dernier étant bien entendu inférieur au gain espéré (risqué) des loteries.

<u>Axiome 5 : Axiome d'indépendance.</u>

Soient deux loteries l_1 et l_2 telles que : $l_1 \succ l_2$. Alors $\forall$ l_3 et $\forall$ $0 < p < 1$, on a :

$$p.l_1 + (1 - p).l_3 \succ p.l_2 + (1 - p).l_3$$

Cet axiome indique que si un agent préfère un gain G1 à un gain G2, alors il préfère nécessairement une loterie qui lui permettrait de gagner G1 à une autre qui lui permettrait de gagner G2.

II. Définition et construction des fonctions d'utilité.

II.1. Définition.

Si l'individu vérifie tous les axiomes de rationalité, alors il $\exists$ une fonction U, dite fonction d'utilité / :

$$\begin{array}{llll} U : & \text{Ensemble des loteries} & \rightarrow & IR \\ & l & \mapsto & U(l) \end{array}$$

et on a alors : $l_1 \succ l_2$ ssi $U(l_1) > U(l_2)$

Les fonctions d'utilité sont donc toujours croissantes et on dit qu'il y a conservation des préférences individuelles : étant donné qu'on préfère la loterie qui donne le plus de gains possibles, on préfère aussi celle qui a l'utilité la plus grande.

Remarque :

En avenir certain, une fonction d'utilité est définie à une fonction croissante près, c'est à dire que si U est une fonction d'utilité, alors $V = \rho.U$, est aussi une fonction d'utilité qui conserve les préférences de l'individu, pour peu que ρ soit croissante.

Exemple : $V = U^2$

Par contre, en avenir incertain, une fonction d'utilité n'est définie qu'à une fonction linéaire croissante près.

Exemple : $V = a + b.U$ avec $b > 0$

Ainsi, il n'est pas important de connaître U, mais plutôt le choix qu'elle induit (axiome 5).

II.2. Construction des fonctions d'utilité.

D'après Von Neumann et Morgenstern (1944), si l'on considère une loterie l telle que :

$$l \begin{cases} w_1 & p_1 \\ \ldots & \\ w_i & p_i \\ \ldots & \\ w_n & p_n \end{cases}$$

où :

- w_i = la richesse
- p_i = la probabilité de réalisation de la richesse w_i

$\Rightarrow$ $U(l) = p_1.U(w_1) + p_2.U(w_2) + \ldots + p_n.U(w_n) = E(U(w_i))$

La formule ci-dessus a pour conséquence, que tout investisseur qui cherche à maximiser son utilité, cherche en fait à maximiser l'espérance de l'utilité de sa richesse.

III. Identification des comportements des investisseurs en matière de risque.

III.1. Nécessité de prise en compte de la richesse initiale.

Les exemples de loteries que nous avons considérées jusque là, se basaient sur le gain ou la perte générés par celles-ci sans prendre en compte la richesse initiale du joueur. Pourtant, il serait tout à fait sensé de penser que le comportement d'un joueur dépende de son niveau de fortune… Pour tenir compte de cet aspect, les loteries seront dorénavant conçues et construites de manière à ce que leur argument ne soit pas le gain généré par la loterie, mais la richesse finale à laquelle un tel gain conduirait.

III.2. Les attitudes des investisseurs vis-à-vis du risque.

Les investisseurs peuvent être classés en trois catégories, selon le comportement qu'ils ont vis-à-vis du risque. Nous distinguons ainsi, entre :

- des investisseurs qui sont averses au risque ;
- des investisseurs qui ont de la propension pour le risque ;
- et, des investisseurs qui sont neutres au risque.

Afin de mieux comprendre le comportement de ces différents investisseurs, nous allons analyser les choix de chacun d'eux face au risque impliqué par une même loterie, qui se présente comme suit : il s'agit de jouer à pile ou à face, avec la possibilité de gagner ou de perdre avec des chances égales, une petite somme h.

Ainsi, l'investisseur considéré, doté d'une richesse initiale w, a le choix entre les deux loteries suivantes :

	Gain / Probabilité	Richesse finale	Espérance / Variance
Ne rien faire	$\{0 \quad 1$	$\{w$	$E(l_1) = w$ $V(l_1) = 0$
Jouer	$\begin{cases} +h & ½ \\ -h & ½ \end{cases}$	$\begin{cases} w + h \\ w - h \end{cases}$	$E(l_2) = w$ $V(l_2) = h^2$

Le choix de l'une ou de l'autre des deux possibilités dépend bien entendu de la nature de l'investisseur.

III.2.1. Cas d'un individu averse au risque.

Un individu averse au risque, est un individu qui, toutes choses étant égales par ailleurs (notamment l'espérance des gains, comme dans le cas des loteries ci-dessus), préfère une loterie moins risquée à une loterie plus risquée : il optera donc pour le fait de ne rien faire (loterie l_1).

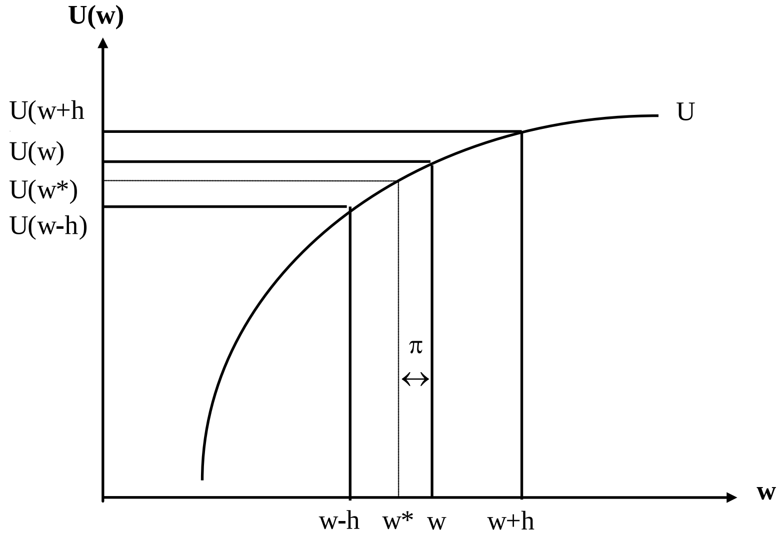
En introduisant la fonction d'utilité de l'investisseur, nous devons donc avoir :

$$U(l_1) > U(l_2)$$
$$\Rightarrow \quad U(w) > 1/2.U(w + h) + 1/2.U(w - h)$$
$$\Rightarrow \quad U(w) - U(w - h) > U(w + h) - U(w)$$

Par définition, cette inégalité traduit une fonction d'utilité concave **:** *U' > 0 et U'' < 0* :

- la première dérivée est nécessairement positive pour une fonction d'utilité, puisque tout individu préfère plus de richesse à moins de richesse ;
- par contre, le fait que la dérivée seconde soit négative, traduit par construction, une attitude d'aversion au risque de la part de l'investisseur.

Ainsi, la fonction d'un individu averse au risque peut être représentée comme suit :



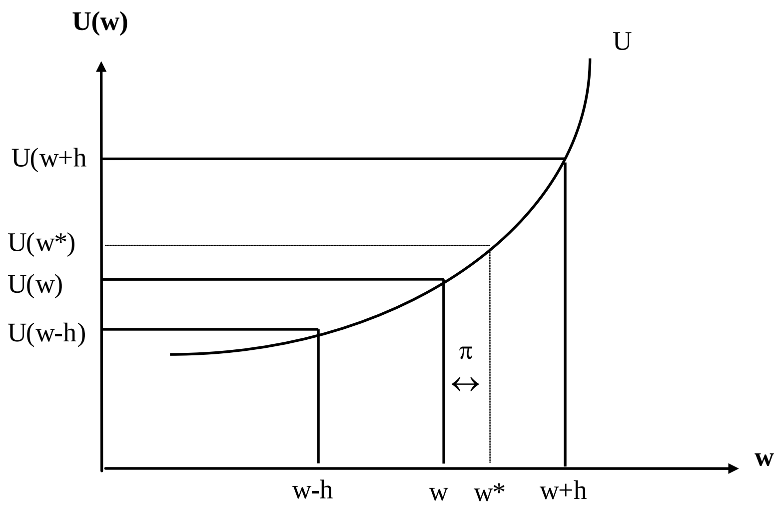
avec $\pi = w - w^* > 0$ (se référer à la section suivante pour la définition de π).

III.2.2. Cas d'un individu qui a de la propension pour le risque.

Un investisseur qui aime le risque, est un investisseur qui préfère la loterie à l'obtention avec certitude de la richesse moyenne, d'où : $U(l_2) > U(l_1)$, ce qui nous donne :

$U(w) - U(w - h) < U(w + h) - U(w)$

Cette inégalité traduit la convexité de la courbe d'utilité : *U' > 0 et U'' > 0* :



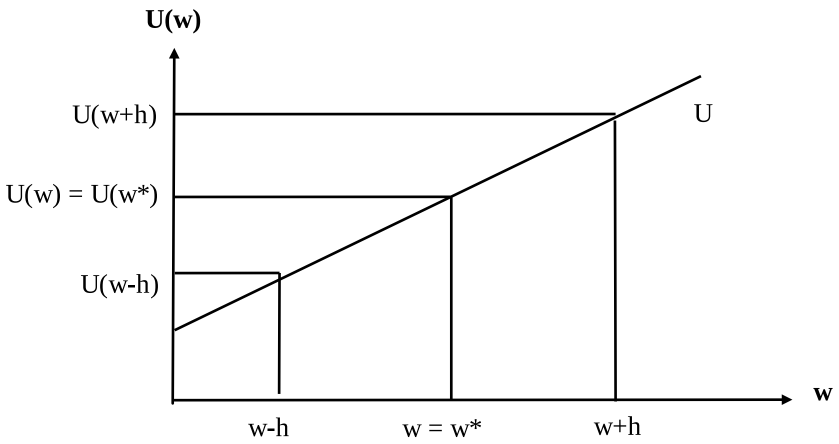
avec $\pi = w - w^* < 0$.

III.2.3. Cas d'un individu neutre au risque.

La neutralité vis à vis du risque, caractérise un agent qui est indifférent entre recevoir sans risque la richesse moyenne de la loterie, ou subir la loterie elle-même, d'où :

$$U(w) - U(w - h) = U(w + h) - U(w)$$

Nous avons alors, $U' > 0$ et $U'' = 0$, c.à.d. que la fonction d'utilité est une fonction linéaire :



avec $\pi = w - w^* = 0$.

IV. Notions d'équivalent certain et de prime de risque.

Si un agent a de l'aversion pour le risque, il préfère obtenir avec certitude une somme donnée (appelée équivalent certain), même si elle est inférieure à la somme qu'il peut espérer obtenir de la loterie, plutôt que de courir un risque en jouant. Un tel investisseur, est à la limite prêt à payer pour ne pas jouer. La somme qu'il est prêt à payer, est la différence qui existe entre la valeur espérée de la richesse de l'individu s'il accepte de jouer, et l'équivalent certain de sa richesse ; cette somme est appelée prime de risque et est notée par π.

Soit w*, l'équivalent certain du jeu proposé dans la section précédente. Par définition, nous avons :

$$w^* / : \quad U(w^*) = U(l_2)$$
$$\Rightarrow \quad U(w^*) = E(U(w_2)) = 1/2.U(w - h) + 1/2.U(w + h)$$

et : $\pi = E(l_2) - w^*$

$$\Rightarrow \quad w^* = E(l_2) - \pi = w - \pi$$
$$\Rightarrow \quad U(w - \pi) = 1/2.U(w - h) + 1/2.U(w + h)$$

Afin d'obtenir l'expression de π, nous avons recours à un développement de Taylor[1], ce qui donne :

$$U(w - \pi) = U(w) - \pi.U'(w) + \pi^2/2.U''(w) - h^3 ... \text{ (pour } b = w - \pi \text{ et } a = w)$$

$$U(w - h) = U(w) - h.U'(w) + h^2/2.U''(w) - h^3 ... \text{ (pour } b = w - h \text{ et } a = w)$$

$$U(w + h) = U(w) + h.U'(w) + h^2/2.U''(w) + h^3 ... \text{ (pour } b = w + h \text{ et } a = w)$$

Ainsi, en approximant chacun des termes de l'égalité par un développement de Taylor limité au premier ordre pour le premier membre et au second ordre pour le deuxième membre, nous obtenons :

$$U(w) - \pi.U'(w) = ½.U(w) - h/2.U'(w) + h^2/4.U''(w) + ½.U(w) + h/2.U'(w) + h^2/4.U''(w)$$

Ce qui donne après simplification :

$$- \pi.U'(w) = h^2/2.U''(w)$$
$$\Rightarrow \quad \pi = (-h^2/2).[U''(w) / U'(w)]$$

Ainsi en matière d'identification du comportement d'un investisseur face au risque, nous pouvons conclure que si :

- $U''(w) < 0 \Rightarrow \pi > 0$: l'individu n'aime pas le risque et est prêt à payer pour ne pas jouer ;
- $U''(w) > 0 \Rightarrow \pi < 0$: l'individu aime le risque ; il faut le payer pour qu'il accepte de renoncer au jeu ;
- $U''(w) = 0 \Rightarrow \pi = 0$: l'individu est indifférent au risque.

Nous remarquons par ailleurs, que l'expression de la prime de risque se compose de deux éléments distincts qui sont :

- h^2, une mesure objective de la quantité de risque véhiculée par la loterie ;
- $[-U''(w) / U'(w)]$, un rapport qui reflète l'allure de la fonction d'utilité, c'est à dire fondamentalement, le comportement de l'individu particulier considéré face au risque.

Ainsi, deux individus placés face à une même loterie et dotés de la même richesse initiale n'exigent pas la même prime de risque, s'ils ont des fonctions d'utilité différentes. Cette conclusion, nous incite à développer des mesures plus précises du risque individuel et à nous pencher également sur les changements qui peuvent avoir lieu au niveau du comportement de chaque individu si sa richesse initiale venait à changer.

[1] Développement de Taylor : Soit f une fonction définie sur [a, b] et dérivable n+1 fois sur]a, b[. Il existe alors c $\in$]a, b[/ :

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)^1}{1!}.f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}.f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}.f^{(n)} + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}f(c)$$

<u>Remarques</u> :

1°- La formule ci-dessus ne peut être utilisée que lorsqu'on dispose d'une loterie de la même forme et avec les mêmes caractéristiques exactement que celle proposée dans la section précédente. Dans tous les autres cas, il faut utiliser la formule générale de la prime de risque, en passant par l'équivalent certain.

2°- Si au lieu d'utiliser, comme nous l'avons fait jusque là, des loteries additives, nous utilisons des loteries multiplicatives de la forme :

$$\begin{cases} W.(1 + h) & ½ \\ W.(1 - h) & ½ \end{cases}$$

où h représente, cette fois, un rendement exprimé en pourcentage de la richesse initiale, w, la prime de risque deviendrait :

$$\pi = (-h^2/2).[w.U''(w) / U'(w)]$$

V. Les mesures locales d'aversion pour le risque.

L'identification du comportement de l'individu face au risque ne nous renseigne pas sur son amplitude : deux individus averses au risque par exemple, peuvent l'être dans des proportions différentes. Pour cela, il est nécessaire de développer des mesures locales du risque, c'est-à-dire des mesures du degré d'attraction ou d'aversion au risque, faites pour un individu donné à un niveau de richesse donné.

Ces mesures présenteront le double avantage de nous permettre :

- d'une part, d'effectuer des comparaisons entre plusieurs individus dans le but de les classer du moins averse au plus averse ou inversement ;
- et d'autre part, d'étudier le comportement d'un même individu en fonction du niveau de richesse auquel il se situe.

A ce propos, la littérature financière a proposé de nombreuses mesures dont les deux plus célèbres restent celles élaborées par Arrow (1965) et Pratt (1964). Il s'agit de :

- l'aversion absolue au risque, une mesure du degré de risque, tirée de l'expression de la prime de risque d'une loterie additive ;
- et de l'aversion relative au risque, une mesure du degré de risque tirée de l'expression de la prime de risque d'une loterie multiplicative.

V.1. Aversion absolue au risque (AAR).

Le coefficient d'aversion absolue au risque (en référence à la variation en termes absolus de la richesse de l'investisseur), se définit par :

$$AAR = - U''(w) / U'(w)$$

Ce rapport décrit en réalité la forme de la fonction d'utilité de l'individu (concave, convexe ou linéaire) et son degré de courbure. Plus la convexité ou la concavité sont accentuées, plus le comportement de l'individu face au risque est marqué, qu'il s'agisse d'attraction ou d'aversion.

Concernant le signe de ce coefficient, il est facile à interpréter :

- si $AAR > 0$ $\Rightarrow$ l'individu est averse au risque ;
- si $AAR < 0$ $\Rightarrow$ l'individu est attiré par le risque ;
- si $AAR = 0$ $\Rightarrow$ l'individu est neutre face au risque.

Ainsi, si deux investisseurs, I_1 et I_2, ont des AAR positifs et que par ailleurs, nous avons : $AAR_1 > AAR_2$, nous pouvons aisément en conclure que le premier investisseur est plus averse au risque que le second.

Pour terminer, le coefficient d'aversion absolue au risque nous permet d'étudier la façon avec laquelle la demande d'actifs risqués évolue avec la richesse de l'individu :

- quand le coefficient AAR est une fonction croissante (décroissante) de la richesse, cela signifie que le montant investi en actifs risqués décroît (croît) avec w ;
- quand l'indice AAR est une fonction constante de w, le montant que l'investisseur est prêt à investir dans des actifs ou jeux risqués, est indépendant du niveau de sa fortune.

V.2. Aversion relative au risque (ARR).

Le coefficient d'aversion relative au risque d'Arrow-Pratt tient son nom du fait qu'il provient des loteries multiplicatives où les gains et pertes sont exprimés en pourcentage de la richesse initiale. Il se définit par :

$$ARR = -[U''(w) / U'(w)].w = AAR.w$$

Ce coefficient décrit la façon dont la proportion investie en actifs risqués évolue avec la richesse. Un indice décroissant par exemple, décrit un agent qui investit une proportion croissante de sa richesse en actifs risqués à mesure que sa richesse augmente.

V.3. L'aversion au risque dans la pratique.

En pratique, les études sur les indices d'aversion au risque prouvent que l'aversion absolue au risque des individus, décroît pratiquement toujours, avec leur richesse (ils sont donc prêts à risquer des sommes de plus en plus élevées en projets risqués quand ils sont plus riches), alors que leur aversion relative au risque est soit décroissante soit le plus souvent constante (ce qui implique qu'ils se fixent généralement un certain pourcentage de leur fortune, qu'ils ne dépassent pas en investissements risqués).

Applications

Application 1 :

Un investisseur hésite à participer à un appel d'offre. Les frais de préparation du dossier s'élèvent à 10.000 dinars. Il estime avoir une chance sur cinq d'obtenir le contrat, auquel cas, il gagnerait 300.000 dinars nets des frais de préparation du dossier. Sa fonction d'utilité est représentée par les chiffres suivants :

Richesse (w)	Utilité U(w)
-15.000	-17
-10.000	-10
0	0
50.000	14
100.000	21
150.000	26
200.000	31
300.000	40

Indiquer si cet investisseur décidera ou non de participer à l'appel d'offre, d'abord selon le critère du gain espéré et ensuite en fonction du critère de l'utilité espérée des gains.

Corrigé :

Il s'agit ici de comparer les 2 loteries suivantes :

Participer à l'appel d'offre

$$l_1 \begin{cases} -10.000 & 4/5 \\ 300.000 & 1/5 \end{cases}$$

Ne pas participer

$$l_2 \begin{cases} 0 & 1 \end{cases}$$

Selon le critère du gain espéré :

$E(l_1) = -10.000*0,8 + 300.000*0,2 = 52.000$
$E(l_2) = 0$

$E(l_1) > E(l_2)$, donc l'investisseur choisit de participer à l'appel d'offre.

Selon le critère de l'utilité espérée des gains :

$U(l_1) = E(U(w)) = U(-10.000)*4/5 + U(300.000)*1/5 = -10*4/5 + 40*1/5 = 0$
$U(l_2) = E(U(w)) = 0$

$U(l_1) = U(l_2)$, donc selon le critère de l'utilité espérée des gains, l'investisseur est indifférent entre participer ou non à l'appel d'offre. Ainsi, le fait de modifier les critères décisionnels pour tenir compte du risque, modifie la décision à prendre.

Application 2*[2] :

On considère une entreprise dont le propriétaire a une fonction d'utilité qui semble pouvoir être ajustée par : $U(w) = 30 + \sqrt{w}$.

1°- Déterminer le comportement de ce propriétaire face au risque.
2°- Cette entreprise a vendu des marchandises à crédit à un client étranger pour un montant non encore recouvré de 360.000 dinars. De récentes informations obtenues font état d'une probable faillite de ce client. Si cette éventualité venait à se réaliser (probabilité 0,35), l'entreprise ne récupérerait qu'un maximum de 50.000 dinars.

> a/ Si l'entreprise avait le choix de subir ou non le défaut de paiement de son client, quelle serait dans les deux cas, la prime de risque qu'elle serait prête à payer pour éviter de courir un tel risque ?
> b/ L'entreprise envisage finalement de s'assurer contre le défaut du paiement de ce montant. Il est demandé compte tenu de la fonction d'utilité du propriétaire, de calculer le montant maximal de prime d'assurance que l'entreprise accepterait de payer.

3°- Etudier de manière ponctuelle le comportement du propriétaire de l'entreprise face au risque.

Corrigé :

1°- $U(w) = 30 + \sqrt{w}$ $\Rightarrow$ $DU = IR^{+}$

$U'(w) = 1/2.w^{-1/2} > 0$ $\Rightarrow$ $DU = IR^{+*}$
$U''(w) = -1/4.w^{-3/2} < 0$ $\Rightarrow$ aversion pour le risque.

2°- a/ $\pi = E(l_1) - w^*$

$$l_1 \begin{cases} 360.000 & 65\% \\ 50.000 & 35\% \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $E(l_1) = 65\%*360.000 + 35\%*50.000 = 251.500$
$\Rightarrow$ w^* / : $30 + \sqrt{w*} = 0{,}65*(\sqrt{360.000} + 30) + 0{,}35*(\sqrt{50.000} + 30)$
$\Rightarrow$ $w^* = 219.269{,}300$
$\Rightarrow$ $\pi = 251.500 - 219.269{,}700 = 32.230{,}300$

b/ Par définition, la prime d'assurance maximale p est telle que l'individu est indifférent entre s'assurer et ne pas s'assurer : U(s'assurer) = U(ne pas s'assurer)

Ne pas s'assurer (l_1)

$$l_1 \begin{cases} 360.000 & 65\% \\ 50.000 & 35\% \end{cases}$$

S'assurer (l_2)

$$l_2 \begin{cases} 360.000 - p & 100\% \end{cases}$$

[2] Les applications marquées d'une étoile proviennent de sujets d'examen de l'IHEC Carthage.

Ayant p / : $U(l_1) = U(l_2)$

$\Rightarrow$ $0{,}65*(\sqrt{360.000} + 30) + 0{,}35*(\sqrt{50.000} + 30) = (\sqrt{360.000} - p + 30)$

$\Rightarrow$ $p = 140.730{,}700$

3°- $U(w) = 30 + \sqrt{w}$

$\Rightarrow$ $U'(w) = 1/2.w^{-1/2} > 0$

$\Rightarrow$ $U''(w) = -1/4.w^{-3/2} < 0$

$\Rightarrow$ $AAR = -U''(w) / U'(w) = -[-1/4.w^{-3/2}] / [1/2.w^{-1/2}] = 1/2w$

$\Rightarrow$ $ARR = -[U''(w) / U'(w)].w = 1/2$

On en conclut que plus cet individu s'enrichit plus il investit des sommes importantes dans des loteries risqués, sans pour autant que la proportion de richesse investie ne change.

Application 3 :

Reprendre l'application 5 du chapitre 2 et indiquer la décision qui serait prise par le dirigeant de la STO, sur la base du critère de l'utilité espérée de la VAN, si l'on supposait que son comportement vis-à-vis du risque pouvait être approximé par la fonction suivante :

$U(w) = Ln(w + 100)$

Corrigé :

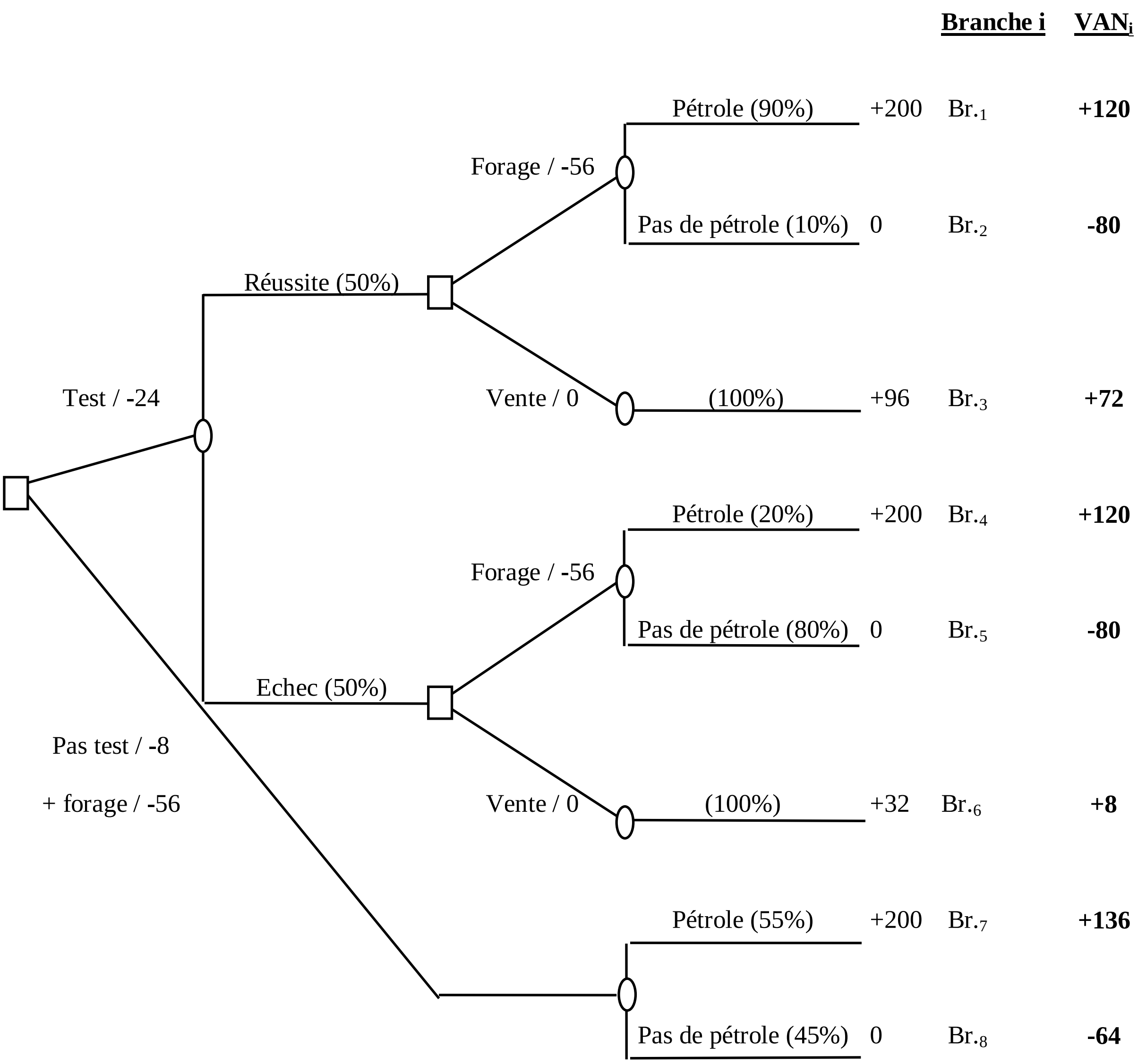
Afin de savoir quelle décision risque d'être prise par le dirigeant de la STO, il faut identifier son comportement en matière de rationalité et de risque. Cette identification se fait à travers les dérivées première et seconde de sa fonction d'utilité :

DU / : $w + 100 > 0$ $\Rightarrow$ $DU =]-100 ; +\infty[$

$U'(w) = 1 / (w + 100) > 0 \ \forall \in \ ]-100 ; +\infty[$ $\Rightarrow$ le dirigeant est donc rationnel

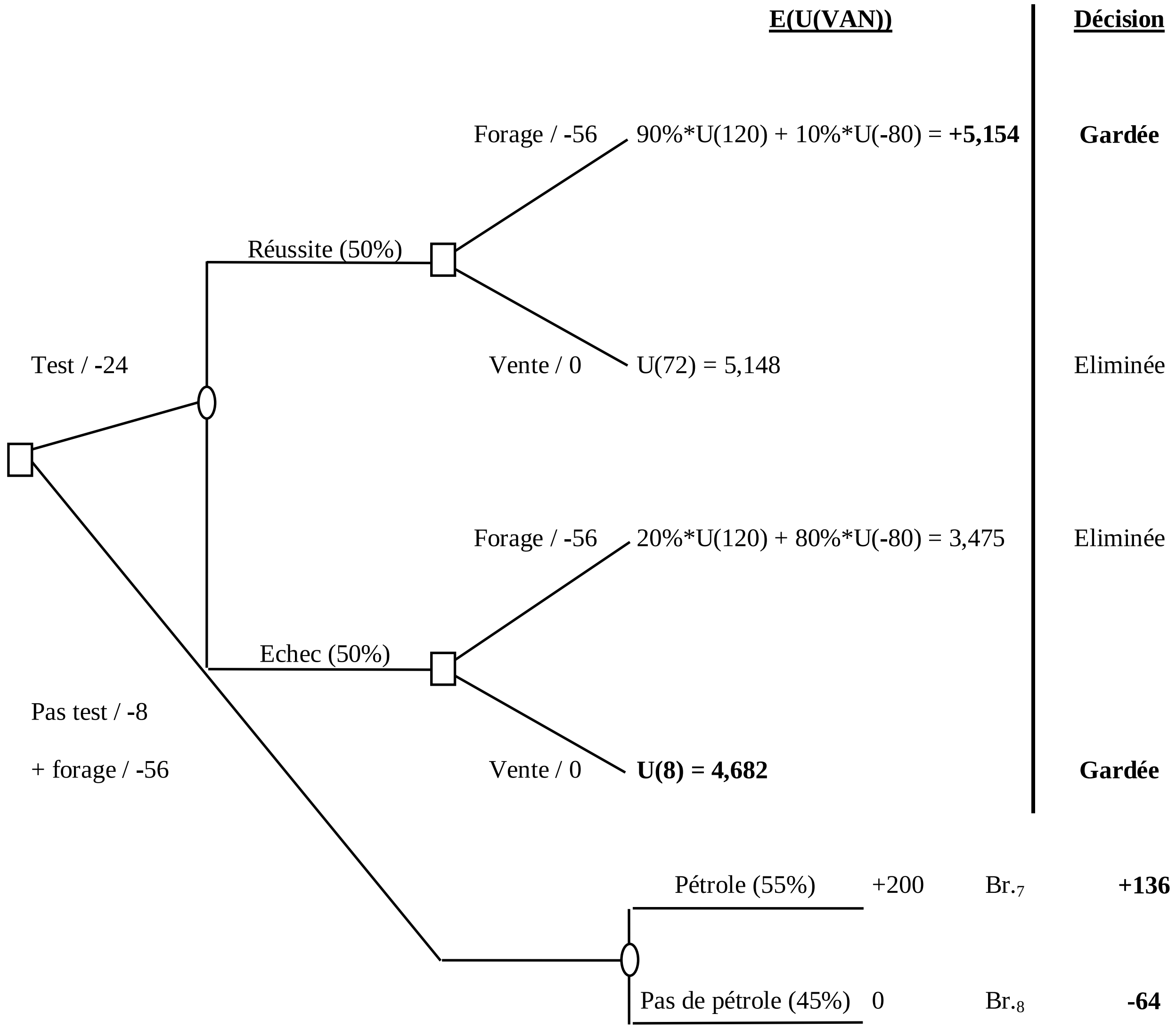
$U''(w) = -1 / (w + 100)^2 < 0 \ \forall \in \ ]-100 ; +\infty[$ $\Rightarrow$ le dirigeant est donc averse au risque

Représentation de l'arbre de décision.

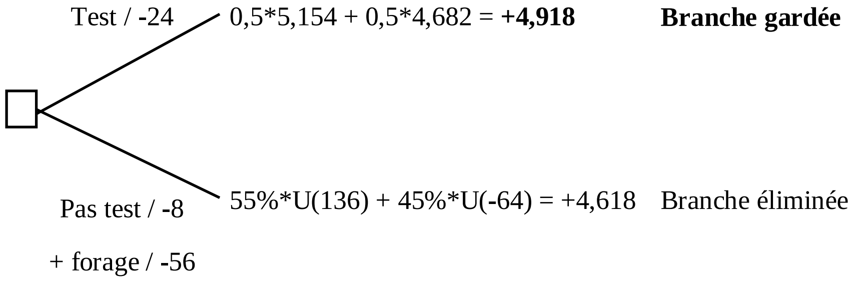


Calcul des utilités espérées de VAN.

1/ Derniers nœuds décisionnels :



2/ Premier nœud décisionnel :



Conclusion :

La décision est restée inchangée : la société STO a intérêt à réaliser le test séismique et si le test réussit, elle effectue le forage, si non, elle vend ses droits à une autre société.

CHAPITRE N° 4

LA DECISION DE FINANCEMENT
ET LE COUT DU CAPITAL

La décision d'investir étudiée dans les trois chapitres précédents, est directement rattachée à la décision de financement : une fois les projets rentables identifiés, l'entreprise doit décider du moyen de financement qu'elle va employer parmi tous ceux qui existent. Ce choix dépend d'une part du coût de la source choisie et d'autre part des possibilités de financement laissées à la firme étant donnée sa structure financière actuelle (rapport dettes/fonds propres).

I. Sources et modes d'évaluation des coûts des financements à long terme.

I.1. Les différentes sources de financement à long terme.

L'entreprise peut avoir recours à plusieurs sources de financement, qui sont globalement classées en :

- sources de financement par fonds propres : il peut s'agir soit de l'autofinancement, soit des augmentations de capital ;
- et autres sources de financement : on trouve dans cette catégorie une grande diversité de financements possibles tels que les dettes, les subventions reçues, le crédit-bail ou leasing, les financements mezzanines...

I.1.1. Le financement par fonds propres.

Les bailleurs de fonds concernés ici, sont les actionnaires. Ils sont appelés « créanciers résiduels », car le revenu qui leur revient, est constitué par les flux économiques retirés des investissements, diminués de l'ensemble des payements contractuels promis à toutes les autres catégories de bailleurs de fonds, soient essentiellement :

- les intérêts dus aux banquiers et aux obligataires ;
- les loyers dus aux leasers ;
- les quotes-parts sur les subventions d'investissement obtenues de la part de l'Etat et réintégrées dans l'état de résultat.

En contrepartie de ce risque, les actionnaires bénéficient d'un pouvoir de contrôle sur la politique menée par les dirigeants, matérialisé par un droit de vote aux assemblées générales.

Notons cependant, que tous les actionnaires ne sont pas identiques, puisqu'il existe outre les actions ordinaires, offrant un droit au dividende et un droit au vote :

- des actions à dividende prioritaire (ADP) : les porteurs de ces titres bénéficient d'un avantage de rendement sous forme d'un dividende prioritaire (payable avant toute autre affectation du bénéfice distribuable) qui ne peut être inférieur au premier dividende des actions ordinaires, ni à un montant fixé lors de l'émission de l'ADP. Toutefois, en contrepartie du dividende prioritaire, ces actionnaires perdent le droit de vote aux assemblées générales ;

- des certificats d'investissement (CI) : ils représentent les droits pécuniaires attachés à l'action, les droits de vote et de présence au niveau des assemblées générales étant représentés par des certificats de droit de vote (CDV) émis à part. La création de certificats d'investissement peut résulter soit du fractionnement d'actions existantes, soit d'une augmentation du capital.

Créés pour permettre aux entreprises d'augmenter leurs fonds propres tout en limitant la dilution du pouvoir, ces titres démunis de droit de vote, offrent souvent à leurs détenteurs, une rémunération supérieure à celle d'une action ordinaire, en guise de compensation de la perte du pouvoir de contrôle. Toutefois, en matière de valorisation, il est difficile de généraliser en disant que ces titres sont systématiquement plus chers que les actions ordinaires, du seul fait qu'ils offrent une rémunération plus élevée et moins incertaine : ce serait en effet ignorer la valeur du droit de vote et la décote de liquidité sur les marchés boursiers qui caractérise souvent ces titres moins demandés que les actions ordinaires.

I.1.2. Les autres sources de financement.

Il s'agit essentiellement du financement par dettes. Les dettes se différencient entre elles par leur durée, leur taux d'intérêt et leur mode de remboursement. Dans tous les cas, il s'agit d'un engagement contractuel contenant des garanties au profit du prêteur. Ainsi, contrairement à l'actionnaire qui peut perdre la totalité de sa mise en acceptant de financer un projet, le prêteur est protégé par un contrat qui lui assure le remboursement de son capital et une rémunération fixe ou variable sous forme d'intérêts.

Outre les différences provenant de leurs caractéristiques contractuelles, on distingue classiquement entre les dettes accordées par les banques et celles souscrites sur les marchés boursiers :

- les premières sont appelées emprunts indivis, dans le sens où la dette contractée l'est auprès d'un seul prêteur. En général, ce type d'emprunt est spécialisé et le financement accordé est accompagné d'une prise de garantie ;
- les secondes sont appelées emprunts obligataires, du fait que la dette contractée est morcelée en parts égales (obligations) souscrites par plusieurs épargnants. Ces parts, sont des contrats financiers qui précisent les obligations de l'emprunteur à l'égard des prêteurs, notamment les modalités de rémunération et de remboursement du capital prêté. En général, les emprunts obligataires sont assortis d'une notation accordée par une agence de rating.

I.2. Principe général d'évaluation des sources de financement à long terme.

Le coût de financement est directement lié à la rémunération qui est exigée par celui qui apporte les capitaux. Cette rémunération dépend à son tour de l'incertitude qui pèse sur le versement à effectuer par l'entreprise, c'est à dire du risque encouru par celui qui amène les capitaux. Aussi, il n'existe pas à proprement parler un financement « plus avantageux » qu'un autre, mais une gamme de financements possibles, dont les coûts différenciés traduisent simplement les différents niveaux de risque encourus par chaque catégorie de bailleurs de fonds.

Ainsi défini, le coût du capital représente le taux limite pour l'affectation du capital aux projets d'investissement. Dans ce sens, il représente le taux de rendement nécessaire pour justifier l'utilisation du capital. Par conséquent quelque soit l'origine du capital, la formule qui sera utilisée pour en déterminer le coût, sera identique à celle qui permet le calcul du TRI, soit l'égalisation à un moment donné des entrées de fonds avec les sorties ; les modèles basés sur ce genre de logique, sont appelés des modèles d'équilibre.

Bien entendu, dans un marché financier parfaitement concurrentiel, deux sources de financement qui ont un niveau de risque identique, doivent nécessairement avoir le même coût et ceci, en raison des opérations d'arbitrage qu'une différence de coût ne manquerait pas de provoquer.

II. Les modèles d'évaluation des capitaux propres.

Les capitaux propres peuvent provenir soit du réinvestissement de tout ou partie des bénéfices de la société (autofinancement) soit de l'émission de nouvelles actions (implicitement ordinaires, dans le cadre du présent cours).

Si les actionnaires choisissent délibérément de ne pas distribuer la totalité des bénéfices sous la forme de dividendes, c'est qu'ils espèrent retirer des fonds laissés à la disposition de l'entreprise, une rentabilité qui est au moins égale à celle que pourraient leur procurer des placements assortis d'un risque équivalent. Par conséquent, le coût des réserves ou fonds réinvestis, est un coût d'opportunité qui correspond au coût des capitaux recueillis par une augmentation du capital.

Le coût des actions ordinaires, peut être estimé de deux manières :

- à l'aide des modèles d'actualisation des dividendes ;
- ou en référence au PER, le Price Earnings Ratio.

II.1. Les modèles d'actualisation des dividendes.

Pour l'acheteur d'un titre donné, la valeur de l'action est la valeur actuelle du flux des recettes attendues. Donc en t = 0, la valeur d'une action donnée, est :

$$P_0 = D_1 / (1 + k_c) + D_2 / (1 + k_c)^2 + ... + D_n / (1 + k_c)^n + P_n / (1 + k_c)^n$$

où :

- P_0 = la valeur de l'action en t = 0 ; c'est son cours
- D_t = le dividende anticipé par action, pour la période t
- P_n = la valeur de revente de l'action au bout de n périodes
- k_c = la rentabilité espérée par l'actionnaire (supposée la même pour tous).

Notons que le taux k_c, outre le fait qu'il constitue dans sa lecture la plus évidente, un temps d'actualisation des flux futurs, constitue un coût de capital pour l'entreprise qui bénéficie de fonds apportés.

Supposons maintenant que l'on veuille revendre cette action ; P_t, le prix de revente, est alors :

$$P_t = D_{t+1} / (1 + k_c)^1 + D_{t+2} / (1 + k_c)^2 + ... + D_{n+m} / (1 + k_c)^m + P_{n+m} / (1 + k_c)^m$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = D_1 / (1 + k_c) + D_2 / (1 + k_c)^2 + ... + D_n / (1 + k_c)^n + D_{n+1} / (1 + k_c)^{n+1} + D_{n+2} / (1 + k_c)^{n+2} + ... + D_{n+m} / (1 + k_c)^{n+m} + P_{n+m} / (1 + k_c)^{n+m}$$

Si cette opération est répétée à l'infini (n ~> ∞), il n'y a plus lieu de parler de prix de revente et l'investisseur reçoit indéfiniment des dividendes, de telle sorte que :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} D_t / (1 + k_c)^t$$

La formule que nous venons d'écrire, est en fait complexe, car elle implique une incertitude à plusieurs niveaux : une incertitude sur les cash-flows futurs (les dividendes anticipés), une incertitude sur le taux d'actualisation, et enfin une incertitude sur le prix de revente quand la durée de détention de l'action est finie. En définitive, seul P_0 est connu.

Pour résoudre ces difficultés, plusieurs hypothèses simplificatrices ont été émises par différents chercheurs, qui ont été à l'origine de plusieurs modèles d'évaluation des dividendes. Nous en considérerons trois, qui sont :

- le modèle de Gordon et Shapiro (1956) ;
- le modèle d'Ezra Solomon (1963) ;
- et le modèle de Georges Bates (1960).

II.1.1. Le modèle de Gordon et Shapiro.

Afin de lever l'incertitude qui pèse sur les dividendes futurs, Gordon et Shapiro supposent que les dividendes de l'entreprise ont un taux de croissance, g, constant (et une politique de distribution régulière) :

$$D_t = D_{t-1}.(1 + g)$$

Le modèle général, devient dès lors :

$$P_0 = D_1 / (1 + k_c) + D_1.(1 + g) / (1 + k_c)^2 + ... + D_1.(1 + g)^{n-1} / (1 + k_c)^n + P_n / (1 + k_c)^n$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = D_1 / (1+ k_c).[1 + (1 + g) / (1 + k_c) + ... + (1 + g)^{n-1} / (1 + k_c)^{n-1}] + P_n / (1 + k_c)^n$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = [D_1 / (1 + k_c)].[1 - [(1 + g) / (1 + k_c)]^n] / [1 - [(1 + g) / (1 + k_c)]] + P_n / (1 + k_c)^n$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = [D_1 / (k_c - g)].[1 - [(1 + g) / (1 + k_c)]^n + P_n / (1 + k_c)^n$$

Si n ~> ∞ et si $g < k_c$, c'est à dire, si le taux de croissance des dividendes est moins élevé que le coût des fonds propres de l'entreprise, alors nous avons :

$$[(1 + g) / (1 + k_c)]^n \sim> 0$$

et :

$$P_n / (1 + k_c)^n \sim> 0$$

$\Rightarrow \quad P_0 = D_1 / (k_c - g)$

$\Rightarrow \quad k_c = (D_1 / P_0) + g$

Cette écriture met en évidence les deux composantes du coût des fonds propres, à savoir :

- une composante explicite qui est le rendement anticipé de l'action (D_1 / P_0) ;
- et une composante implicite, généralement plus importante, qui correspond à la croissance anticipée des dividendes (g).

La formule de Gordon et Shapiro peut être exprimée en fonction des bénéfices de la manière suivante, en notant d, le taux de distribution (constant) des bénéfices, B_t :

$$D_t = d.B_t \quad \forall t$$

$\Rightarrow \quad k_c = (B_1.d / P_0) + g$

Dans le cas particulier où le taux de croissance des dividendes est nul (g = 0), les dividendes sont constants, et on a :

$$k_c = D_1 / P_0$$

II.1.2. Le modèle d'Ezra Solomon.

L'hypothèse de croissance constante des dividendes de Gordon et Shapiro ayant été fortement critiquée dans la littérature financière, Ezra Solomon démontre, qu'elle est au moins plausible dans le cas où l'entreprise répond aux conditions suivantes :

- r = le taux de rendement des investissements, est constant ;
- b = le taux de rétention des bénéfices, est constant ;
- l'entreprise assure sa croissance uniquement par autofinancement.

Soient :

- B_t = le bénéfice de la période t, avec t = 1, ..., n
- D_t = le dividende de la période t, avec t = 1, ..., n

$\Rightarrow \quad D_t = (1 - b).B_t \qquad \forall t = 1, ..., n$

Soit I_t, l'investissement de la période t, correspondant à la partie du bénéfice non distribuée en t-1 :

$$I_t = b.B_{t-1}$$

Le bénéfice additionnel dû à cet investissement supplémentaire est donc égal à :

$$B_t - B_{t-1} = r.b.B_{t-1}$$
$$\Rightarrow \quad B_t = (1 + r.b).B_{t-1}$$
$$\Rightarrow \quad D_t / (1 - b) = (1 + r.b).D_{t-1} / (1 - b)$$
$$\Rightarrow \quad D_t = (1 + r.b).D_{t-1}$$

Cette équation, reflète la croissance constante des dividendes. Elle signifie que les dividendes suivent une progression géométrique, de raison g telle que g = r.b.

Si nous remplaçons g par r.b, et D_1 par $B_1.(1 - b)$, dans le modèle de Gordon et Shapiro, nous obtenons :

$$k_c = [B_1.(1 - b) / P_0] + r.b$$

Conclusion, l'hypothèse de croissance constante des dividendes, peut en pratique se réaliser, lorsque le taux de rendement des investissements et le taux de rétention sur les bénéfices sont constants et que l'entreprise ne se finance que par réinvestissement des bénéfices (pas de dettes et pas d'augmentation de capital). Ceci revient à dire que le modèle de Gordon et Shapiro n'est en fait applicable qu'aux sociétés en stade de maturité qui ont une croissance stabilisée. Son usage fréquent en pratique pour des sociétés en stade de croissance, notamment lors des introductions en bourse, est donc totalement inadéquat.

II.1.3. Le modèle de Georges Bates ou modèle mixte bénéfices-dividendes.

Le modèle de Georges Bates généralise les deux modèles précédents. Il pose :

- d_t = le taux de distribution des bénéfices sur la période t, $\forall$ t = 1, ..., n
- g_t = le taux de croissance des bénéfices sur la période t, $\forall$ t = 1, ..., n
- k_c = le taux de rendement exigé par le marché, supposé constant

Nous avons alors :

$$\begin{cases} B_1 = B_0.(1 + g_1) \\ B_2 = B_1.(1 + g_2) = B_0.(1 + g_1).(1 + g_2) \\ \dots \\ B_n = B_{n-1}.(1 + g_n) = B_0.(1 + g_1).(1 + g_2) \dots (1 + g_n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} D_1 = d_1.B_1 = d_1.B_0.(1 + g_1) \\ D_2 = d_2.B_2 = d_2.B_0.(1 + g_1).(1 + g_2) \\ \dots \\ D_n = d_n.B_n = d_n.B_0.(1 + g_1).(1 + g_2) \dots (1 + g_n) \end{cases}$$

Par conséquent, le cours à l'instant 0 devient :

$$P_0 = B_0.[d_1.(1 + g_1) / (1 + k_c) + \dots + d_n.(1 + g_1).(1 + g_2) \dots (1 + g_n) / (1 + k_c)^n] + P_n / (1 + k_c)^n$$

Le modèle de Georges Bates, est le modèle le plus général de tous les modèles d'évaluation du coût des fonds propres par les méthodes d'actualisation des dividendes. Seulement, cette complexité, fait que l'expression de P_0 contient plusieurs inconnues, qui sont : g_1, g_2,..., g_n ; d_1, d_2,...d_n et k_c. Pour résoudre l'équation, il faut réduire le nombre d'inconnues en supposant que :

- le taux de distribution des bénéfices, d_t, est constant = d ;
- le taux de croissance des bénéfices, g_t, est constant = g.

Or, cette simplification réduit finalement le modèle de Bates à celui de Gordon et Shapiro !

$$P_0 = B_0.d.(1 + g) / (1 + k_c).[1 + (1 + g) / (1 + k_c) + ... + (1 + g)^{n-1} / (1 + k_c)^{n-1}] \\ + P_n / (1 + k_c)^n$$

II.1.4. Insuffisances des modèles d'actualisation des dividendes.

Les méthodes d'évaluation du coût des fonds propres par les modèles d'actualisation des dividendes, souffrent de plusieurs insuffisances, qui sont les suivantes :

- elles nécessitent la connaissance du prix P_0, et ne concernent donc, que les sociétés cotées en bourse ;
- dans la réalité, plusieurs entreprises cotées ont pour stratégie de ne jamais distribuer de dividendes. Pourtant, leurs titres n'ont aucune difficulté à rencontrer des acheteurs ;
- les méthodes d'actualisation des dividendes sont enfin basées sur un taux d'actualisation unique qui ne varie pas dans le temps. Cette hypothèse est particulièrement éloignée de la réalité.

II.2. L'utilisation du Price Earnings Ratio (PER).

Le PER d'une action se définit comme étant le rapport du cours de l'action sur le bénéfice qu'elle rapporte. Pour déterminer ce ratio, nous allons repartir du modèle de Gordon et Shapiro :

$$P_0 = D_1 / (1 + k_c) + D_1.(1 + g) / (1 + k_c)^2 + ... + D_1.(1 + g)^{n-1} / (1 + k_c)^n \\ + P_n / (1 + k_c)^n$$

Or :

$$D_1 = d.B_1 = d.B_0.(1 + g)$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = B_0.d.(1 + g) / (1 + k_c).[1 + (1 + g) / (1 + k_c) + ... + (1 + g)^{n-1} / (1 + k_c)^{n-1}] + P_n / (1 + k_c)^n$$

$$\Rightarrow \quad P_0 / B_0 = d.(1 + g) / (1 + k_c).[1 - [(1 + g) / (1 + k_c)]^n] / [1 - [(1 + g) / (1 + k_c)] \\ + [P_n / B_n].[B_n / (1 + k_c)^n].[1 / B_0]$$

Sachant que :

$$B_n = B_0.(1 + g)^n$$

$$\Rightarrow \quad PER_0 = d.(1 + g) / (1 + k_c).[1 - [(1 + g) / (1 + k_c)]^n] / [1 - [(1 + g) / (1 + k_c)] \\ + PER_n.[(1 + g) / (1 + k_c)]^n$$

Si n ~> ∞ et si $g < k_c$, cette formule se simplifie pour donner :

$$PER_0 = d.(1 + g) / (k_c - g)$$

Cette formule permet d'obtenir de manière explicite les variables déterminantes du PER d'une société ; plus précisément, le PER est une fonction :

- croissante du taux de croissance des bénéfices ;
- croissante de la capacité de distribution des dividendes, c'est à dire la rentabilité des investissements ;
- et décroissante du taux d'actualisation, c'est à dire du risque de la société.

A partir de cette expression du PER, nous pouvons tirer l'expression du coût des fonds propres, k_c / :

$$k_c = [d.(1 + g) / PER_0] + g$$

Si on suppose que g = 0, on obtient :

$$k_c = d / PER_0$$

expression, qui est souvent (abusivement) approximée sur les marchés boursiers par :

$$k_c \approx 1 / PER_0$$

III. Les modèles d'évaluation des dettes.

Que l'emprunt soit indivis ou obligataire, il existe quatre façons de le rembourser, appelées modes d'amortissement : constant, *in fine*, par annuités constantes ou à coupon-zéro.

<u>L'amortissement constant</u>.

Ce mode d'amortissement tient son nom du fait que le principal remboursé chaque période (généralement l'année) est constant. La conséquence directe de ce choix est que les intérêts[3], eux, vont diminuer au fur et à mesure que le capital est remboursé, ce qui implique que les annuités (capital + intérêts) versées au prêteur, diminuent elles aussi avec le temps.

<u>L'amortissement *in fine*</u>.

Dans ce cas, la totalité du capital emprunté est remboursée en une seule fois, à la date d'échéance du prêt. Pendant toute la durée du prêt, l'emprunteur ne paye que des intérêts, c'est à dire l'usage du capital. Quand le taux d'intérêt est fixe, le montant est le même chaque année. Il s'y rajoute le capital, la dernière année du remboursement.

<u>L'amortissement par annuités constantes</u>.

Ce type d'amortissement permet d'avoir des annuités identiques à chaque période. Le capital se réduisant chaque année, les intérêts ne peuvent que croître, pour maintenir constante la somme totale décaissée annuellement.

[3] Nous n'aborderons dans le cadre de ce cours que les emprunts à taux fixe.

L'amortissement à coupon-zéro.

L'emprunteur ne verse rien au prêteur pendant toute la durée de l'emprunt. A l'échéance, il rembourse le capital initial augmenté des intérêts capitalisés. En fait, tout se passe comme si le capital restant dû à chaque période s'alourdissait des intérêts courus.

Quelque soit le mode de remboursement adopté, l'évaluation du coût d'un emprunt se détermine, comme pour le capital, par le recours aux modèles d'équilibre basés sur l'égalisation à un moment donné des entrées et sorties de fonds. Dans le cas d'un financement par dette :

- les entrées de fonds sont le principal de la dette encaissé par l'entreprise à l'instant 0 ;
- les sorties de fonds, sont les intérêts et le remboursement du capital qui doivent avoir lieu entre la première année et la date d'échéance.

Notons que le coût de la dette est un coût explicite qui est plus facile à déterminer, que le coût des fonds propres, étant donné que le taux d'intérêt et le montant du capital à rembourser, ainsi que la durée de l'emprunt sont tous connus d'avance.

III.1. Coût d'un emprunt indivis en absence d'imposition.

Considérons une entreprise qui contracte une dette D_0, qu'elle rembourse sur n années. Le taux d'intérêt nominal annuel, est de i et les intérêts sont payés annuellement en fin de période. On note par k_d, le coût de la dette. Le modèle d'équilibre implique :

$$D_0 = i.D_0 / (1 + k_d)^1 + i.D_0 / (1 + k_d)^2 + ... + i.D_0 / (1 + k_d)^n + D_0 / (1 + k_d)^n$$

$$\Rightarrow \quad 1 - (1 + k_d)^{-n} = i.[1 - (1 + k_d)^{-n-1} - k_d / (1 + k_d)] / [k_d / (1 + k_d)]$$
$$\Rightarrow \quad 1 - (1 + k_d)^{-n} = (i / k_d).[1 - (1 + k_d)^{-n}]$$

Si $(1 + k_d)^{-n} \neq 1$

$$\Rightarrow \quad k_d = i$$

Ainsi, le coût de la dette est indépendant du montant emprunté et correspond au taux d'intérêt, la rentabilité exigée par la banque prêteuse.

III.2. Coût d'un emprunt indivis en présence d'imposition.

Nous allons compliquer ici la situation précédente, en supposant que l'entreprise est imposable à l'impôt sur les sociétés (IS) au taux τ. Dans ce cas, étant donné que l'entreprise paie des intérêts qui sont comptabilisés en charges, son bénéfice imposable va être diminué du montant des intérêts. Ainsi, l'entreprise ne paye pas en réalité $i.D_0$, mais plutôt, $i.D_0.(1 - \tau)$. Par conséquent :

$$D_0 = i.D_0.(1 - \tau) / (1 + k_d^{\tau})^1 + i.D_0.(1 - \tau) / (1 + k_d^{\tau})^2 + ... + [i.D_0.(1 - \tau) + D_0] / (1 + k_d^{\tau})^n$$

$$\Rightarrow \quad k_d^{\tau} = i.(1 - \tau)$$

Conclusion, en présence d'impôts, le coût de la dette de l'entreprise diminue. Il devient par ailleurs, différent de la rentabilité exigée par la banque.

III.3. Coût d'un emprunt obligataire en absence d'imposition.

III.3.1. Notation et tableau d'amortissement.

Considérons un emprunt obligataire caractérisé par les paramètres suivants :

- C = la valeur nominale par titre
- R = la valeur de remboursement par titre
- E = la valeur d'émission par titre
- N = le nombre de titres émis
- n = le nombre d'années de remboursement
- i = le taux d'intérêt nominal ou facial
- c = C.i = le montant du coupon annuel
- μ_p = le nombre de titres remboursés la p^e année
- a_p = l'annuité de la p^e année

Le tableau de remboursement de cet emprunt dans le cadre général se présente comme suit :

Période	**Intérêts**	**Remboursement du principal**	**Annuité**	**Titres restant en circulation en fin de période**
1	$I_1 = N.c$	$\mu_1.R$	$a_1 = \mu_1.R + N.c$	$N_1 = N - \mu_1$
2	$I_2 = N_1.c$	$\mu_2.R$	$a_2 = \mu_2.R + N_1.c$	$N_2 = N_1 - \mu_2$
...				
p	$I_p = N_{p-1}.c$	$\mu_p.R$	$a_p = \mu_p.R + N_{p-1}.c$	$N_p = N_{p-1} - \mu_p$
p + 1	$I_{p+1} = N_p.c$	$\mu_{p+1}.R$	$a_{p+1} = \mu_{p+1}.R + N_p.c$	$N_{p+1} = N_p - \mu_{p+1}$
...				
n	$I_n = N_{n-1}.c$	$\mu_n.R$	$a_n = \mu_n.R + N_{n-1}.c$	$N_n = N_{n-1} - \mu_n = 0$

III.3.2. Détermination du coût de la dette.

Sur la base du modèle d'équilibre, le coût de la dette k_d, se détermine de la manière suivante :

$$N.E = a_1 / (1 + k_d) + a_2 / (1 + k_d)^2 + ... + a_n / (1 + k_d)^n$$

Si les annuités sont constantes ($a_1 = a_2 = ... = a_n = a$), cette équation se simplifie en :

$$N.E = a.[1 - (1 + k_d)^{-n}] / k_d$$

Cette équation est problématique dans le sens où, outre k_d, l'annuité a est inconnue ; il faut donc en déterminer la valeur… Pour ce faire, on procède par itération, de la manière suivante :

<u>1ère année</u> :

$$N_1 = N - \mu_1$$
$$\Rightarrow \quad N_1.R = N.R - \mu_1.R$$

Or, par définition, l'annuité est la somme du capital remboursé et des intérêts payés, soit :

$$a_1 = \mu_1.R + N.c$$
$$\Rightarrow \quad \mu_1.R = a_1 - N.c$$

$\Rightarrow \quad N_1.R = N.R - (a_1 - N.c) = N.R - a_1 + N.c$
$\Rightarrow \quad N_1.R = N.R.(1 + c / R) - a_1$
$\Rightarrow \quad N_1.R = N.R.(1 + r) - a_1 \text{ avec : } r = c / R$

Le taux r est appelé taux d'intérêt apparent et nous avons :

$$c / R = C.i / R$$

Or : $C / R < 1$

$\Rightarrow \quad C.i / R < i$
$\Rightarrow \quad r < i$

<u>2e année</u> :

$$N_2 = N_1 - \mu_2$$
$\Rightarrow \quad N_2.R = N_1.R - \mu_2.R$

Or, sachant que :

$$a_2 = \mu_2.R. + N_1.C$$

$\Rightarrow \quad N_2.R = N_1.R - a_2 + N_1.C$
$\Rightarrow \quad N_2.R = N_1.R\ (1 + r) - a_2$
$\Rightarrow \quad N_2.R = (N - \mu_1).R.(1 + r) - a_2. = N.R.(1 + r) -\mu_1.R.(1 + r) - a_2$
$\Rightarrow \quad N_2.R = N.R.(1 + r) -(a_1 + N.c).(1 + r) - a_2$
$\Rightarrow \quad N_2.R = N.R.(1 + r) - a_1.(1 + r) + N.c.(1 + r)- a_2$
$\Rightarrow \quad N_2.R = (1 + r).[N.R.(1 + r)] - a_1.(1 + r) - a_2$
$\Rightarrow \quad N_2.R = N.R.(1 + r)^2 - a_1.(1 + r) - a_2$

...

<u>ne année</u> :

$$N_n.R = 0$$

$\Rightarrow \quad N.R.(1 + r)^n - a_1.(1 + r)^{n-1} - a_2.(1 + r)^{n-2} - .... - a_{n-1}.(1 + r) - a_n = 0$
$\Rightarrow \quad N.R.(1 + r)^n = a_1.(1 + r)^{n-1} + a_2.(1 + r)^{n-2} + ... + a_{n-1}.(1 + r) + a_n = 0$
$\Rightarrow \quad N.R = a_1 / (1 + r)^1 + a_2 / (1 + r)^2 + ... + a_{n-1} / (1 + r)^{n-1} + a_n / (1 + r)^n$

Si les annuités sont constantes, on obtient :

$$N.R = a.[1 - (1 + r)^{-n}] / r$$

En reprenant l'expression de N.E, quand les annuités sont constantes :

$$N.E = a.[1 - (1 + k_d)^{-n}] / k_d$$

$\Rightarrow \quad N.E = N.R.[[1 - (1 + k_d)^{-n}] / k_d].[r / [1 - (1 + r)^{-n}]]$
$\Rightarrow \quad E = R.(r / k_d).[1 - (1 + k_d)^{-n}] / [1 - (1 + r)^{-n}]$

Cette relation nous permet de déterminer le taux k_d qui est en même temps coût de la dette pour la société et rendement offert aux obligataires. On notera par ailleurs, que le nombre de titres émis N, n'intervient nulle part dans cette équation.

Remarque :

Cette situation de base peut être compliquée de plusieurs manières possibles en rajoutant sur les flux ci-dessus, des frais divers, tels que des frais de dossier, des frais d'émission, des frais de remboursement... A titre d'exemple, si l'entreprise supporte des frais d'émission d'une valeur, f, par titre, le coût de la dette, devient k_d' tel que :

$$E - f = R.(r / k_d').[1 - (1 + k_d')^{-n}] / [1 - (1 + r)^{-n}]$$

Notons que dans ce cas, le coût de l'endettement pour l'entreprise, k_d', n'est plus égal au taux de rendement exigé par les bailleurs de fonds, k_d.

III.3.3. Détermination de la relation entre deux annuités consécutives.

En reprenant l'emprunt initial, en absence d'impôts sur les bénéfices, on peut développer la relation mathématique qui existe entre deux annuités consécutives, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a_{p+1} - a_p &= \mu_{p+1}.R. + N_p.c - \mu_p.R. - N_{p-1}.c = \mu_{p+1}.R. - \mu_p.R. + c.(N_p - N_{p-1}) \\ &= \mu_{p+1}.R. - \mu_p.R. - c.\ \mu_P = \mu_{p+1}.R. - (c + R)\mu_p \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad a_{p+1} - a_p = \mu_{p+1}.R. - \mu_p.R.(1 + c / R)$$

Si les annuités sont constantes, $a_{p+1} - a_p = 0$:

$$\Rightarrow \qquad \mu_{P+1} = \mu_p.(1 + r)$$

μ_p est alors une suite géométrique de raison (1 + r).

III.4. Impact de l'imposition sur le coût de l'endettement obligataire.

Si l'entreprise est imposable au titre de ses bénéfices, elle réalise des économies d'impôt, non seulement sur les intérêts payés annuellement, mais également sur les primes d'émission et de remboursement offertes aux obligataires et d'une manière générale, sur l'ensemble des frais qu'elle supporte au titre de cet emprunt.

Selon le système comptable tunisien, les frais et primes relatifs aux emprunts obligataires sont considérés comme des charges financières qui doivent être amorties sur la durée de vie de l'emprunt au prorata des intérêts courus. Cette disposition permet à l'entreprise d'imputer à chaque exercice une charge financière correspondant à la partie non remboursée de l'emprunt.

L'ensemble de ces économies vient en déduction du montant de l'annuité effective de chaque exercice et permet en définitive à l'entreprise de réduire son coût d'endettement réel.

III.4.1. Détermination des économies d'impôt.

Si nous reprenons le tableau d'amortissement ci-dessus, nous pouvons en déduire les incidences fiscales des différentes charges financières :

Année	Intérêts	Eco. d'τ / intérêts	$P.^{pal}$	Eco. d'τ / primes	Annuité de remboursement	Annuité effective	Titres restants
1	$I_1 = N.c$	$I_1.\tau$	$\mu_1.R$	$\tau.N.(R-E).I_1/\sum I_p$	$a_1 = \mu_1.R + N.c$	$a_1' = \mu_1.R + I_1.(1-\tau) - \tau.N.(R-E).(I_1/\sum I_p)$	$N_1 = N - \mu_1$
2	$I_2 = N_1.c$	$I_2.\tau$	$\mu_2.R$	$\tau.N.(R-E).I_2/\sum I_p$	$a_2 = \mu_2.R + N_1.c$	$a_2' = \mu_2.R + I_2.(1-\tau) - \tau.N.(R-E).(I_2/\sum I_p)$	$N_2 = N_1 - \mu_2$
...							
p	$I_p = N_{p-1}.c$	$I_p.\tau$	$\mu_p.R$	$\tau.N.(R-E).I_p/\sum I_p$	$a_p = \mu_p.R + N_{p-1}.c$	$a_p' = \mu_p.R + I_p.(1-\tau) - \tau.N.(R-E).(I_p/\sum I_p)$	$N_p = N_{p-1} - \mu_p$
p+1	$I_{p+1} = N_p.c$	$I_{p+1}.\tau$	$\mu_{p+1}.R$	$\tau.N.(R-E).I_{p+1}/\sum I_p$	$a_{p+1} = \mu_{p+1}.R + N_p.c$	$a_{p+1}' = \mu_{p+1}.R + I_{p+1}.(1-\tau) - \tau.N.(R-E).(I_{p+1}/\sum I_p)$	$N_{p+1} = N_p - \mu_{p+1}$
...							
n	$I_n = N_{n-1}.c$	$I_n.\tau$	$\mu_n.R$	$\tau.N.(R-E).I_n/\sum I_p$	$a_n = \mu_n.R + N_{n-1}.c$	$a_n' = \mu_n.R + I_n.(1-\tau) - \tau.N.(R-E).(I_n/\sum I_p)$	$N_n = 0 = N_{n-1} - \mu_n$

III.4.2. Etapes de calcul du coût de la dette.

Le coût de la dette k_d^{τ}, se détermine de la manière suivante en fonction des annuités effectives :

$$N.E = a_1' / (1 + k_d^{\tau}) + a_2' / (1 + k_d^{\tau})^2 + ... + a_n' / (1 + k_d^{\tau})^n$$

qui nécessitent elles-mêmes la connaissance :

- du nombre de titres remboursés chaque année : quand les annuités sont constantes, celui-ci peut être déterminé sur la base des deux formules suivantes :

$$\mu_{P+1} = \mu_p.(1 + r)$$

et $$\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n = N$$

- et du montant des intérêts payés chaque année : une fois que l'on dispose du nombre de titres remboursés, on en déduit celui restant dû à la fin de chaque année, et par suite, le montant des intérêts à payer. Une fois ces calculs achevés, on peut alors calculer les prorata d'amortissement des primes d'émission et de remboursement.

IV. Des coûts spécifiques au coût global : l'approche par le coût moyen pondéré.

Nous avons jusque là considéré la nature des différentes sources de financement auxquelles peut avoir recours la firme (essentiellement des fonds propres et des dettes), et nous en avons évalué le coût séparément.

En réalité, les entreprises n'ont pratiquement jamais recours de manière exclusive à l'une ou l'autre de ces deux sources de financement. Le coût du capital de l'entreprise, est dès lors, un mélange du coût des fonds propres et de celui des dettes.

Ce coût global k, est appelé coût moyen pondéré du capital, et est obtenu en pondérant le coût des différentes sources de financement par leur contribution respective dans la structure de financement :

$$k = k_c.C / (C + D) + k_d.D / (C + D)$$

où :

- C = le montant total des capitaux propres
- D = le montant total des dettes

Cette écriture peut être transformée en posant L = D/C, de la manière suivante :

$$k = k_c / (1 + L) + k_d.L / (1 + L)$$

et le coût de capital k, ainsi défini, est :

- d'une part, la rentabilité globale exigée par l'ensemble des bailleurs de fonds de l'entreprise, correspondant au risque que ces investisseurs estiment courir, en offrant des capitaux à celle-ci ;
- et d'autre part, le seuil de rentabilité minimal exigé sur l'ensemble des projets d'investissement de l'entreprise.

Notons toutefois, que cette conclusion ne peut être tirée et que l'approche du coût global du capital ne peut être faite par l'utilisation du coût moyen pondéré, que si les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

- les coûts des fonds propres et des dettes sont indépendants l'un de l'autre ;
- et le montant des fonds propres est indépendant de celui des dettes.

Applications

Application 1 :

Les caractéristiques de la société S ont été les suivantes durant les cinq dernières années :

Informations liées à l'exploitation :

Période	2008	2009	2010	2011	2012
Chiffre d'affaires	2.200	2.400	2.600	3.000	3.500
Charges d'exploitation	820	940	1.000	1.150	1.200
Dotations aux amortissements	500	560	600	700	750

Niveau d'endettement moyen :

Période	2008	2009	2010	2011	2012
Dettes	450	550	600	730	900

Déterminer le coût des capitaux propres de la société, sachant que :

- le coût de la dette est constant et s'élève à 12% ;
- le chiffre d'affaires a été encaissé en fin de période ;
- les charges d'exploitation et les frais financiers ont été décaissés en fin de période ;
- la société est exonérée de l'impôt sur les bénéfices ;
- les dividendes sont payés au moment de la constatation des bénéfices ;
- la société applique un taux de rétention sur les bénéfices de 80% ;
- la capitalisation boursière de l'entreprise était de 1.000 au début de 2008 et qu'elle s'élève à 1.045 à la fin de 2012.

Corrigé :

$$N.P_0 = [(D_1 / (1 + k_c)) + (D_2 / (1 + k_c)^2) + ... + (D_5 / (1 + k_c)^5) + (P_5 / (1 + k_c)^5)].N$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = (D_1 / (1 + k_c)) + (D_2 / (1 + k_c)^2) + ... + (D_5 / (1 + k_c)^5) + (P_5 / (1 + k_c)^5)$$

Détermination des dividendes :

	2008	2009	2010	2011	2012
Chiffre d'affaires	2.200	2.400	2.600	3.000	3.500
Charges d'exploitation	820	940	1.000	1.150	1.200
Dotation aux amortissements	500	560	600	700	750
Charges financières	54	66	72	87,6	108
Bénéfice net	826	834	928	1.062,4	1.442
Dividendes	165,2	166,8	185,6	212,48	288,4

Détermination de k_c :

k_c / : $1.000 = (165,2 / (1 + k_c)) + (166,8 / (1 + k_c)^2) + ... + (1.333,4 / (1 + k_c)^5)$

$\Rightarrow \quad k_c \approx 20\%$

Application 2 :

Une société a dégagé un bénéfice par action de 4 dinars au titre du dernier exercice. Elle devrait connaître un taux de croissance des bénéfices de 8%. Elle compte en outre, distribuer en permanence 30% de ses bénéfices. L'action de cette entreprise se vend en bourse à 25 dinars. A quel prix faudrait-il vendre cette action dans 5 ans, dans le cadre du modèle de Gordon et Shapiro pour en retirer sur la période, une rentabilité annuelle de 17,50% ?

Corrigé :

$$P_0 = D_1 / (1 + k_c) + D_2 / (1 + k_c)^2 + ... + D_5 / (1 + k_c)^5 + P_5 / (1 + k_c)^5$$

$\Rightarrow$ $P_0 = [B_0.d.(1 + g) / (1 + k_c)].[1 + [(1 + g) / (1 + k_c)] + ... + [(1 + g) / (1 + k_c)]^4] + P_5 / (1 + k_c)^5$

$\Rightarrow$ $P_5 = [P_0 - [B_0.d.(1 + g) / (1 + k_c)].[1 - [(1 + g) / (1 + k_c)]^5] / [1 - [(1 + g) / (1 + k_c)]]]].[1 + k_c]^5$

$\Rightarrow$ $P_5 = [25 - [4*0,3*1,08 / 1,175].[1 - [1,08 / 1,175]^5] / [1 - [1,08 / 1,175]]]].[1,175]^5$

$\Rightarrow$ $P_5 = 50$ dinars.

Application 3 :

Un investisseur compte acheter des actions de la société S. Son conseiller financier lui indique que ces actions rapportent actuellement un dividende de 2 dinars par an, et qu'elles connaissent un taux de croissance de 8% qui durerait encore durant les 5 prochaines années ; par la suite, ce taux devrait retomber pour se stabiliser à 3%. Sachant que cet investisseur exige une rentabilité de 15%, à quel prix achètera-t-il les actions de la société S ?

Corrigé :

$$P_0 = (D_1 / (1+k_c)) + (D_2 / (1+k_c)^2) + ... + (D_5 / (1+k_c)^5) + (D_6 / (1+k_c)^6) + ... + (D_n / (1+k_c)^n) + ...$$

$\Rightarrow$ $P_0 = (D_0.(1 + g_1) / (1 + k_c)) + (D_0.(1 + g_1)^2 / (1 + k_c)^2) + ... + (D_0.(1 + g_1)^5 / (1 + k_c)^5)$
$+ (D_0.(1 + g_1)^5.(1 + g_2) / (1 + k_c)^6) + (D_0.(1 + g_1)^5.(1 + g_2)^2 / (1 + k_c)^7) + ...$

$\Rightarrow$ $P_0 = [D_0.(1 + g_1) / (1 + k_c)].[1 + ((1 + g_1) / (1 + k_c)) + ... + ((1 + g_1) / (1 + k_c))^4]$
$+ [D_0.(1 + g_1)^5.(1 + g_2) / (1 + k_c)^6].[1 + ((1 + g_2) / (1 + k_c)) + ...]$

Etant donné que $n \rightsquigarrow +\infty$ et que $g_2 = 2\% < k_c = 11\%$:

$$P_0 = [D_0.(1 + g_1) / (1 + k_c)].[[1 - ((1 + g_1) / (1 + k_c))^5] / [1 - ((1 + g_1) / (1 + k_c))]] + [D_0.(1 + g_1)^5.(1 + g_2) / ((1 + k_c)^5.(k_c - g_2))]$$

$\Rightarrow$ $P_0 = [D_0.(1+g_1) / (k_c-g_1)].[1 - ((1+g_1) / (1+k_c))^5] + [D_0.(1+g_1)^5.(1+g_2) / ((1+k_c)^5.(k_c-g_2))]$

$\Rightarrow$ $P_0 = [2*1,08 / (0,15 - 0,08)].[1 - (1,08 / 1,15)^5] + [2*(1,08)^5.(1,03) / ((1,15)^5.(0,15 - 0,03))]$

$\Rightarrow$ $P_0 = 20,856$ dinars.

Application 4 :

On considère une société qui a un coût de fonds propres de 14% et qui prévoit :

- un taux de croissance des bénéfices de 15% pendant 2 ans avec un taux de distribution de 20% chaque année ;
- un taux de croissance des bénéfices de 12% avec un taux de distribution de 25% les 3e et 4e années ;
- et un taux de croissance de 9% la 5e année avec un taux de distribution de 30%.

Sachant par ailleurs, que le bénéfice à la date 0 est de 3 dinars par action et que l'action de la société cote 45,800 dinars, déterminer le PER de revente de l'action au bout des 5 ans.

Corrigé :

$$P_0 = (D_1 / (1 + k_c)) + (D_2 / (1 + k_c)^2) + ... + (D_5 / (1 + k_c)^5) + (P_5 / (1 + k_c)^5)$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = [d_1.B_0.(1 + g_1) / (1 + k_c)] + [d_1.B_0.(1 + g_1)^2 / (1 + k_c)^2] + [d_2.B_0.(1 + g_1)^2.(1 + g_2) / (1 + k_c)^3] + [d_2.B_0.(1 + g_1)^2.(1 + g_2)^2 / (1 + k_c)^4] + [d_3.B_0.(1 + g_1)^2.(1 + g_2)^2.(1 + g_3) / (1 + k_c)^5] + [P_5 / (1 + k_c)^5]$$

Nous avons par ailleurs :

$$PER_0 = P_0 / B_0$$

et $PER_5 = P_5 / B_5$

$$\Rightarrow \quad PER_0 = [d_1.(1 + g_1) / (1 + k_c)] + [d_1.(1 + g_1)^2 / (1 + k_c)^2] + [d_2.(1 + g_1)^2.(1 + g_2) / (1 + k_c)^3] + [d_2.(1 + g_1)^2.(1 + g_2)^2 / (1 + k_c)^4] + [d_3.(1 + g_1)^2.(1 + g_2)^2.(1 + g_3) / (1 + k_c)^5] + [P_5 / B_5].[B_5 / B_0].[1 / (1 + k_c)^5]$$

avec :

$$B_5 = B_0.(1 + g_1)^2.(1 + g_2)^2.(1 + g_3)$$

$$\Rightarrow \quad PER_0 = [d_1.(1 + g_1) / (1 + k_c)] + [d_1.(1 + g_1)^2 / (1 + k_c)^2] + [d_2.(1 + g_1)^2.(1 + g_2) / (1 + k_c)^3] + [d_2.(1 + g_1)^2.(1 + g_2)^2 / (1 + k_c)^4] + [d_3.(1 + g_1)^2.(1 + g_2)^2.(1 + g_3) / (1 + k_c)^5] + [PER_5.(1 + g_1)^2.(1 + g_2)^2.(1 + g_3) / (1 + k_c)^5]$$

$$\Rightarrow \quad PER_5 = [PER_0 - [d_1.(1 + g_1) / (1 + k_c)] - [d_1.(1 + g_1)^2 / (1 + k_c)^2] - [d_2.(1 + g_1)^2.(1 + g_2) / (1 + k_c)^3] - [d_2.(1 + g_1)^2.(1 + g_2)^2 / (1 + k_c)^4] - [d_3.(1 + g_1)^2.(1 + g_2)^2.(1 + g_3) / (1 + k_c)^5]].[(1+k_c)^5 / ((1+g_1)^2.(1+g_2)^2.(1+g_3))]$$

Application numérique :

$P_0 = 45,800$	$g_1 = 15\%$	$d_1 = 20\%$
$B_0 = 3$	$g_2 = 12\%$	$d_2 = 25\%$
$k_c = 14\%$	$g_3 = 9\%$	$d_3 = 30\%$

$\Rightarrow \quad PER_5 = 15$ dinars.

Application 5* :

La société S a émis un emprunt obligataire de 100.000 titres, amortissable par annuités constantes, sur une durée de 10 ans. Les caractéristiques de cet emprunt sont les suivantes :

- valeur nominale par titre : 10 dinars
- valeur d'émission par titre : 9,5 dinars
- valeur de remboursement par titre : 10,5 dinars
- taux d'intérêt nominal : 11%

Sachant par ailleurs, que la société S subit des frais d'émission par titre de 150 millimes et qu'elle est exonérée de l'impôt sur les sociétés au titre de ses bénéfices :

1°- Calculer le nombre et le montant des titres remboursés la première année.
2°- Calculer le montant de l'annuité constante.
3°- Calculer le nombre de titres restant en circulation après le cinquième tirage.
4°- Calculer :

a/ La durée de vie probable ou médiane des obligations (date à laquelle le nombre de titres remboursés = au nombre de titres qui restent encore en circulation).
b/ La durée de vie moyenne des obligations.

5°- Calculer le taux de rendement à l'émission pour l'ensemble des obligataires.
6°- Calculer le taux de rendement pour les prêteurs qui ont été remboursés la quatrième année.
7°- Calculer le coût de revient de l'emprunt à la société S.
8°- Reprendre les questions précédentes, en supposant que la société S est imposable à 35% au titre de l'impôt sur les sociétés.

Corrigé :

1°- Quand l'amortissement de l'emprunt se fait par annuités constantes, on a :

$$\mu_{P+1} = \mu_p.(1 + r)$$

avec :

$$r = i.(C / R)$$

On a, par ailleurs :

$$N = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_{10}$$

$\Rightarrow$ $N = \mu_1 + \mu_1.(1 + r) + ... + \mu_1.(1 + r)^9 = \mu_1.[(1 + r)^{10} - 1] / r$

$\Rightarrow$ $\mu_1 = N.r / [(1 + r)^{10} - 1]$

$$r = i.(C / R) = 11\%*10 / 10,5 = 10,476\%$$

$\Rightarrow$ $\mu_1 = 100.000*10,476\% / [(1 + 10,476\%)^{10} - 1] = 6.133$ titres

$\Rightarrow$ $\mu_1.R = 6.133*10,5 = 64.396,500$ dinars.

2°- Montant de l'annuité constante = a / :

$$a = N.R.r / [1 - (1 + r)^{-n}]$$

$\Rightarrow$ $a = 100.000*10{,}5*10{,}476\% / [1 - (1 + 10{,}476\%)^{-10}] = 174.392{,}409$ dinars.

3°- Nombre de titres restant à rembourser après le 5^{e} tirage = N_5 / :

$$N_5 = N - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 - \mu_5$$
$$\Rightarrow \quad N_5 = N - \mu_1 - \mu_1.(1 + r) - \mu_1.(1 + r)^2 - \mu_1.(1 + r)^3 - \mu_1.(1 + r)^4$$
$$\Rightarrow \quad N_5 = N - \mu_1.[[1 - (1 + r)^5] / [1 - (1 + r)]]$$
$$\Rightarrow \quad N_5 = N - (\mu_1 / r).[(1 + r)^5 - 1]$$

$$\Rightarrow \quad N_5 = 100.000 - (6.133 / 10{,}476\%).[1 - (1 + 10{,}476\%)^5] = 62.200 \text{ titres.}$$

4°- <u>Durée de vie médiane</u> = p / :

$$\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_p = N - \mu_1 - \mu_2 - ... - \mu_p$$
$$\Rightarrow \quad N = 2.(\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_p) = 2.[\mu_1 + \mu_1.(1 + r) + ... + \mu_1.(1 + r)^{p-1}]$$
$$\Rightarrow \quad N = 2.(\mu_1 / r).[(1 + r)^p - 1]$$
$$\Rightarrow \quad (1 + r)^p = (N / 2).(r / \mu_1) + 1$$
$$\Rightarrow \quad p.Ln(1 + r) = Ln[(N / 2).(r / \mu_1) + 1]$$
$$\Rightarrow \quad p = Ln[(N / 2).(r / \mu_1) + 1] / Ln(1 + r)$$

$$\Rightarrow \quad p = Ln[(100.000 / 2).(10{,}476\% / 6.133) + 1] / Ln(1 + 10{,}476\%) = 6{,}1968$$
$\Rightarrow$ p = 6 ans, 2 mois et 11 jours.

<u>Durée de vie moyenne</u> = DVM / :

$$DVM = [\sum_{p=1}^{n} p.\mu_p] / N = [1.\mu_1 + 2.\mu_2 + 3.\mu_3 + ... + 10.\mu_{10}] / N$$

Or, sachant que $\mu_p = \mu_{p-1}.(1 + r)$, on obtient :

μ_1 = 6.133 titres	μ_6 = 10.093 titres
μ_2 = 6.775 titres	μ_7 = 11.150 titres
μ_3 = 7.485 titres	μ_8 = 12.318 titres
μ_4 = 8.269 titres	μ_9 = 13.608 titres
μ_5 = 9.135 titres	μ_{10} =15.034 titres

$\Rightarrow$ DVM = 6 ans, 3 mois et 21 jours.

5°- Etant donné que les obligataires ne subissent pas les frais d'émission, leur taux de rendement, k_d, est déterminé de la manière suivante :

$$N.E = a.[1 - (1 + k_d)^{-n}] / k_d$$
$$\Rightarrow \quad 100.000*9{,}5 = [174.392{,}409 / k_d] .[1 - (1 + k_d)^{-10}]$$
$$\Rightarrow \quad k_d = 12{,}85\%.$$

6°- Le taux de rentabilité des obligataires remboursés le 4e année est k_d' / :

$$E = [i.C / (1+k_d')] + [i.C / (1+k_d')^2] + [i.C / (1+k_d')^3] + [i.C / (1+k_d')^4] + R / (1+k_d')^4$$

$$\Rightarrow \quad E = [i.C / k_d'].[1 - (1 + k_d')^{-4}] + R / (1 + k_d')^4$$

$$\Rightarrow \quad 9{,}5 = [11\%*10 / k_d'].[1 - (1 + k_d')^{-4}] + 10{,}5 / (1 + k_d')^4$$

$$\Rightarrow \quad k_d' = 13{,}73\%.$$

7°- Le taux de revient de l'emprunt pour la société S est k_d'' / :

$$N.(E - f) = a.[1 - (1 + k_d'')^{-n}] / k_d''$$

$$\Rightarrow \quad 100.000*(9{,}5 - 0{,}15) = [174.392{,}409 / k_d''].[1 - (1 + k_d'')^{-10}]$$

$$\Rightarrow \quad k_d'' = 13{,}308\%.$$

8°- L'introduction d'un impôt sur les sociétés ne modifie en rien les résultats des questions 1° à 6°. Par contre, la réalisation d'économies d'impôt sur les charges financières et les frais d'émission, doit pouvoir faire diminuer le coût de l'emprunt de la société, de la manière suivante :

$$N.(E - f) = a_1'/(1 + k_d^{\tau}{}'') + a_2'/(1 + k_d^{\tau}{}'')^2 + ... + a_p'/(1 + k_d^{\tau}{}'')^p + ... + a_n'/(1 + k_d^{\tau}{}'')^n$$

où, ap' est l'annuité effective payée par la société ; elle est déterminée de la manière suivante :

$$a_p' = \mu_P.R + N_{p-1}.c.(1 - \tau) - \tau.(R - E).N.[I_p / \sum_{p=1}^{n} I_p] - \tau.f.N.[I_p / \sum_{p=1}^{n} I_p]$$

Il devient par conséquent nécessaire de défalquer l'annuité de remboursement constante (a), en intérêts et principal pour chaque année, comme le montre le tableau suivant :

Année	Intérêts	Intérêts effectifs	Principal	Annuité constante	Eco. τ / f. d'émission	Eco. τ / primes	Annuité effective	Titres restants
1	110.000,000	71.500,000	64.393,820	174.393,82	832,207	5.548,044	129.513,509	100.000 - 6.133 = 93.867
2	103.253,981	67.115,087	71.139,939	174.393,82	781,167	5.207,797	132.265,960	93.867 - 6.775 = 87.092
3	95.801,236	62.270,803	78.592,584	174.393,82	724,785	4.831,905	135.306,697	87.092 - 7.485 = 79.607
4	87.567,727	56.919,022	86.826,093	174.393,82	662,495	4.416,633	138.665,987	79.607 - 8.269 = 71.338
5	78.471,660	51.006,579	95.922,160	174.393,82	593,680	3.957,857	142.377,204	71.338 - 9.135 = 62.203
6	68.422,672	44.474,737	105.971,148	174.393,82	517,657	3.451,018	146.477,214	62.203 - 10.093 = 52.110
7	57.320,932	37.258,606	117.072,888	174.393,82	433,663	2.891,083	151.006,749	52.110 - 11.150 = 40.960
8	45.056,154	29.286,500	129.337,666	174.393,82	340,872	2.272,487	156.010,806	40.960 - 12.318 = 28.642
9	31.506,493	20.479,221	142.887,326	174.393,82	238,361	1.589,086	161.539,099	28.642 - 13.608 = 15.034
10	16.537,345	10.749,274	157.856,475	174.393,82	125,114	834,090	167.646,545	15.034 - 15.034 = 0
	Σ = 693.938,2		**Σ = 1.050.000**		**Σ = 5.250**			

Ainsi, le coût de revient de cet emprunt pour la société S devient k_d" / :

$$100.000 * (9,5 - 0,15) = 129.513,569 / (1 + k_d^{\tau}") + 132.265,960 / (1 + k_d^{\tau}")^2$$
$$+ ... + 161.539,099 / (1 + k_d^{\tau}")^9 + 167.646,545 / (1 + k_d^{\tau}")^{10}$$

$\Rightarrow$ $k_d^{\tau}" = 8,623\%$.

<u>CHAPITRE N° 5</u>

LA THEORIE DE LA STRUCTURE FINANCIERE DE LA FIRME : LA POLITIQUE DE L'ENDETTEMENT

I. Introduction à la théorie de la structure financière.

Le coût moyen pondéré du capital s'obtient en fonction des choix de financement effectués par l'entreprise et des coûts de ces différents choix. Dans ce sens, l'entreprise doit choisir une structure de financement (dosage fonds propres/dettes) optimale qui lui permette de minimiser son coût global du capital et par suite, de maximiser sa valeur. Ce choix est appelé politique financière de la firme et regroupe deux mesures essentielles qui sont :

- la politique de l'endettement, qui suppose que l'entreprise distribue la totalité de ses bénéfices et qui étudie l'impact d'une modification du niveau de l'endettement sur la valeur de celle-ci ;
- et la politique des dividendes, qui étudie l'impact d'une modification de la valeur des fonds propres sur la valeur de l'entreprise et son coût moyen pondéré du capital, en agissant sur le taux de rétention des bénéfices.

Le présent chapitre sera consacré à la politique d'endettement de l'entreprise et à la détermination d'un éventuel niveau optimal d'endettement : bien que moins chère que les fonds propres et ayant un effet bénéfique sur la rentabilité financière, c'est-à-dire la rentabilité revenant aux actionnaires[4], la dette augmente les charges financières de l'entreprise et réduit son bénéfice net, aboutissant ainsi à une augmentation inévitable de son risque global.

Dans le cadre de ce cours, l'étude de la politique d'endettement sera faite par le recours aux trois théories suivantes :

- la théorie du bénéfice net de David Durand (1952) ;
- la théorie du bénéfice d'exploitation de Modigliani et Miller (1958 & 1963) ;
- la théorie traditionnelle.

II. La théorie du bénéfice net ou théorie de David Durand.

II.1. Principe de la théorie du bénéfice net.

Pour les défenseurs de cette théorie, chaque source de financement, peut être considérée comme étant indépendante de la structure financière mise en œuvre. En cas d'inégalité entre les coûts des diverses ressources utilisées, l'entreprise doit maximiser la part accordée à la ressource la moins coûteuse, c'est à dire les dettes. Ainsi, la théorie du bénéfice net suppose :

- que le coût des dettes, k_d, est constant par rapport à la structure financière, L ;
- et que le coût des capitaux propres, k_c, est également constant par rapport à L.

---

[4] Ce résultat s'obtient à partir de l'équation de l'effet de levier qui met en rapport le rendement économique (R_E) avec le rendement financier (R_F) :

$$R_F = [R_E + (R_E - i).L].(1 - \tau)$$

Cette équation signifie que tant que le rendement économique des projets est supérieur au taux d'intérêt facturé par la banque (i), toute augmentation de l'endettement (levier L = D/C) vient améliorer la rentabilité des actionnaires.

Pour déterminer comment réagit le coût global du capital, nous reprenons la formule du coût moyen pondéré du capital (CMP) :

$$k = k_c / (1 + L) + k_d.L / (1 + L)$$

$$\Rightarrow \quad \partial k / \partial L = (k_d - k_c) / (1 + L)^2 < 0 \text{ car } k_d < k_c$$

Donc, le CMP du capital est une fonction décroissante de L. Si :

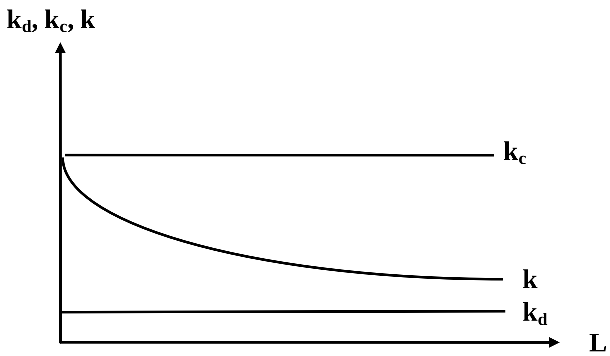
- D ~> 0 ⇒ L ~> 0 ⇒ k augmente (notons que D peut atteindre 0) ;
- C ~> 0 ⇒ L ~> ∞ ⇒ k diminue.

<u>Conclusion</u> :

Le cas à retenir, est celui où les dettes forment la quasi-totalité des capitaux de l'entreprise (c.à.d. C ~> 0). Dans ce cas, l'entreprise tend vers une structure optimale, mais ne l'atteint jamais, car aucune entreprise ne peut être exclusivement financée par des dettes. Conclusion, il n'existe pas de structure financière optimale finie, selon la théorie du bénéfice net.

II.2. Représentation graphique.

En repartant des hypothèses de base de la théorie du bénéfice net, et de ses résultats, nous obtenons le graphique suivant :



II.3. Critique de la théorie du bénéfice net.

La principale faiblesse de la théorie du bénéfice net, réside dans l'hypothèse d'invariabilité des coûts des capitaux propres et de la dette : admettre cette hypothèse revient à admettre que l'entreprise ne devient pas plus risquée aux yeux des bailleurs de fonds, à mesure que son ratio d'endettement augmente et qu'elle cherche à tirer avantage de l'effet de levier.

III. La théorie du bénéfice d'exploitation : thèse de Modigliani et Miller (M.M.).

III.1. Les hypothèses de base.

La conception de Modigliani et Miller, n'est pas basée sur des hypothèses de comportement. Il s'agit plutôt d'une construction théorique, rigoureuse et logiquement déduite d'un ensemble de propositions, qui définissent un marché de capitaux parfait, soient :

- Les investisseurs sont rationnels et averses au risque ;
- L'information est disponible et gratuite ;

- Il n'existe pas de barrière à l'entrée du marché et aucun investisseur n'a le pouvoir d'influencer la formation des prix ;
- Les titres sont parfaitement divisibles et liquides. Leur quantité est connue et fixe ;
- Il n'existe ni coûts de transactions, ni impôts, ni taxes ;
- Il est possible de prêter et d'emprunter des sommes illimitées au taux sans risque.

Relues, dans le cadre de la recherche sur la structure financière, elles impliquent notamment l'existence d'un taux d'endettement unique et constant (k_d), auquel peuvent prêter et emprunter de manière illimitée, tous les investisseurs.

III.2. Les propositions de Modigliani et Miller.

III.2.1. La proposition I de M.M. (1958) ou la thèse de neutralité de l'endettement.

III.2.1.1. Contenu de la proposition.

M.M. affirment que sur un marché parfait, le coût global du capital est indépendant de la structure financière de l'entreprise et qu'il n'y a pas sur un tel marché de place pour « l'illusion financière » : la valeur de capitalisation globale du revenu net d'exploitation d'une firme, ne peut être altérée par une modification de la répartition de la distribution de ce revenu entre les prêteurs et les actionnaires. Elle serait donc exclusivement fonction du risque économique de la firme tel que mesuré par le résultat d'exploitation. D'où, le contenu de leur proposition I :

> *« La valeur de marché d'une firme est indépendante de sa structure financière. Elle est obtenue en actualisant le bénéfice espéré à un taux k, correspondant à la classe de risque de la firme »*

D'une manière explicite, si on considère deux entreprises S_1 et S_2 identiques en tous points, sauf en ce qui concerne leur structure financière, leur coût global du capital devrait être strictement identique comme on peut le montrer ci-dessous :

<u>Société S_1</u>	**<u>Société S_2</u>**
$V_1 = C_1$	$V_2 = C_2 + D$

Soit X est le résultat d'exploitation ; c'est le revenu de l'ensemble des bailleurs de fonds qu'ils soient actionnaires ou obligataires. Sachant que la valeur de toute entreprise est déterminée par l'actualisation de l'ensemble de ses résultats, nous avons :

$$V = X / (1 + k) + X / (1 + k)^2 + ... + X / (1 + k)^n$$
$$\Rightarrow \quad V = [X / (1 + k)].[1 - (1 + k)^{-n}] / [1 - (1 + k)^{-1}]$$
$$\Rightarrow \quad V = [X / k].[1 - (1 + k)^{-n}]$$

Si n ~> ∞, on obtient :

$$V \approx X / k$$
$$\Rightarrow \quad V_1 = C_1 = X / k_1 \qquad\qquad V_2 = C_2 + D = X / k_2$$

D'après M.M., ces deux firmes doivent avoir le même coût du capital, ce qui signifie que :

$$k_1 = k_2$$
$$\Rightarrow \quad V_1 = V_2$$

III.2.1.2. Démonstration de la proposition.

La démonstration proposée par M.M.[5] repose sur un raisonnement d'arbitrage qui se présente comme suit : ils considèrent tour à tour, les hypothèses $V_1 > V_2$ et $V_2 > V_1$, et ils démontrent que sur un marché parfait, aucune de ces deux situations ne peut tenir très longtemps. Ainsi, selon M.M., V_1 ne peut qu'être égale à V_2, ce qui signifie que tout déséquilibre ne peut qu'être temporaire.

<u>1ère Hypothèse</u> : $V_1 > V_2$

Considérons un actionnaire qui possède une fraction α du capital de la société S_1, pour un montant s_1 / :

$$s_1 = \alpha.C_1 = \alpha.V_1$$

Ces actions lui rapportent un revenu y_1 / :

$$y_1 = \alpha.C_1.k_1 = \alpha.X$$

Supposons que cet actionnaire veuille vendre ses actions de S_1, pour les investir dans S_2; cet investissement sera réparti de la manière suivante :

$$s_1 \begin{cases} (D / V_2).s_1 \text{ en obligations} & \Rightarrow \text{ elles lui rapporteront : } (D / V_2).s_1.k_d \\ (C_2 / V_2).s_1 \text{ en actions} & \Rightarrow \text{ elles lui rapporteront : } [(C_2 / V_2).s_1].[(X - k_d.D) / C_2] \end{cases}$$

Donc, son revenu total serait y_2 / :

$$y_2 = (D / V_2).s_1.k_d + [(C_2 / V_2).s_1].[(X - k_d.D) / C_2]$$
$$\Rightarrow \quad y_2 = (s_1 / V_2).(k_d.D + X - k_d.D)$$
$$\Rightarrow \quad y_2 = (s_1 / V_2).X$$
$$\Rightarrow \quad y_2 = \alpha.X.V_1 / V_2$$

Cette opération ne serait intéressante que si $y_2 > y_1$: vrai puisque par hypothèse, $V_1 > V_2$.

<u>Conclusion</u> :

Nous partons d'une situation où $V_1 > V_2$, et nous trouvons que $y_2 > y_1$. Par conséquent, les investisseurs vendront leurs actions de S_1, pour acheter des titres de S_2 faisant ainsi augmenter le cours de S_2 (V_2) et baisser celui de S_1 (V_1), d'où, un rétablissement de l'équilibre ($V_1 = V_2$) par arbitrage, à très court terme.

<u>2e Hypothèse</u> : $V_2 > V_1$

Considérons un actionnaire qui possède une fraction α du capital de la société S_2, pour un montant s_2 / :

$$s_2 = \alpha.C_2$$

[5] Le même résultat peut être facilement démontré par le recours au MEDAF.

Ces actions lui rapportent un revenu y_2 / :

$$y_2 = \alpha.(X - kd.D)$$

Supposons que cet actionnaire veuille vendre ses actions de S_2, pour les investir dans S_1. Pour que les deux opérations soient comparables et que la logique de l'arbitrage soit préservée, il faut qu'il investisse dans S_1 un portefeuille qui représente exactement la même structure de bilan de la société S_2. Or, la société S_2 est endettée, alors que lui, il n'est qu'actionnaire ; par conséquent, s'il veut retracer le bilan de S_2, il doit emprunter dans les mêmes proportions qu'elle, et rajouter le montant de cet emprunt à la somme qu'il veut investir dans la société S_1. En définitive donc, l'investisseur emprunte $\alpha.D$ et investit au total dans S_1, la somme s_1 / :

$$s_1 = s_2 + \alpha.D = \alpha.C_2 + \alpha.D = \alpha.V_2$$

Cette somme lui rapporte dans la société S_1, le rendement des fonds propres k_c, qui n'est autre que X / V_1, c'est à dire un revenu de $s_1.X / V_1 = \alpha.X.V_2 / V_1$.

Or, pour pouvoir opérer cette opération d'arbitrage, l'actionnaire de la société S_2 a dû emprunter une somme $\alpha.D$. Il va donc, devoir payer des intérêts qui s'élèvent à $k_d.\alpha.D$, qui vont venir en déduction du revenu qui lui revient de son investissement dans la société S_1. En définitive, son opération de placement dans la société S_1, lui procure un revenu net y_1 / :

$$y_1 = (\alpha.X.V_2 / V_1) - \alpha.k_d.D$$

Or, cet arbitrage n'est intéressant à mettre en place que si : $y_1 > y_2$, ce que nous pouvons aisément vérifier :

$$(\alpha.X.V_2 / V_1) - \alpha.k_d.D > \alpha.(X - kd.D)$$
$$\Rightarrow \quad (\alpha.X.V_2 / V_1) - \alpha.k_d.D > \alpha.X - \alpha.kd.D$$
$$\Rightarrow \quad V_2 > V_1$$

Conclusion :

Le même raisonnement que précédemment va s'appliquer : les investisseurs vendront leurs titres dans S_2, pour acheter des actions dans S_1, ce qui fera diminuer le cours V_2 et augmenter le cours V_1. On tendra alors, vers l'équilibre : $V_2 = V_1$ et on aura de nouveau : $k_1 = k_2$.

Ainsi, dans le cadre des marchés parfaits, la valeur d'une firme endettée est équivalente à celle d'une firme non endettée : à l'équilibre, aucun avantage ne peut être retiré de l'effet de levier. Ce résultat implique qu'il n'existe pas de structure financière optimale, ou encore, que toute structure financière est optimale.

III.2.2. Proposition II de M.M. (1958).

III.2.2.1. Contenu de la proposition.

La 2^e proposition de M.M. concerne le coût des fonds propres et s'énonce comme suit :

« Le coût des fonds propres d'une firme endettée, est une fonction croissante du levier L, exprimé en termes de valeur de marché »

III.2.2.2. Démonstration de la proposition.

Nous avons :

$$k = k_c / (1 + L) + k_d.L / (1 + L)$$
$$\Rightarrow \quad k.(1 + L) = k_c + k_d.L$$
$$\Rightarrow \quad k_c = k.(1 + L) - k_d.L$$
$$\Rightarrow \quad k_c = k + (k - k_d).L$$

k et k_d étant des constantes indépendantes de L et k étant supérieur à k_d, nous en concluons que k_c est une fonction linéaire croissante de L.

III.2.3. Proposition III de M.M. (1958).

III.2.3.1. Contenu de la proposition.

M.M. apportent une troisième et dernière proposition, qui est la suivante :

> *« Si l'entreprise agit dans l'intérêt des actionnaires, elle retiendra tout projet d'investissement dont le taux de rendement interne (TRI), est supérieur ou égal au coût du capital, k »*

III.2.3.2. Démonstration de la proposition.

Nous savons d'après la proposition I de M.M., que le coût global du capital est indépendant de la structure financière de la firme. Nous nous proposons par conséquent, de considérer une entreprise qui entreprend un projet d'investissement qui est totalement financé par de la dette.

Soient :

- V_0 = la valeur de la firme avant la réalisation du projet
- V_1 = la valeur de l'entreprise après la réalisation du projet
- I = le montant investi dans le projet

Nous avons donc :

$$V_0 = C_0 + D_o = X / k$$
et : $$V_1 = C_1 + D_1 = C_1 + (D_0 + I)$$

Si le projet d'investissement envisagé offre un taux de rentabilité interne r, le bénéfice qu'il procurera à l'entreprise sera de : r.I. Par conséquent, la valeur de l'entreprise après le projet peut être écrite de la manière suivante :

$$V_1 = (X + r.I) / k$$

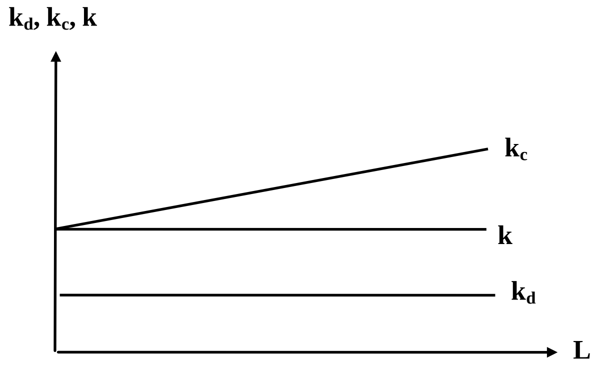
Pour que l'entreprise décide de réaliser le projet en tenant compte de l'intérêt de ses actionnaires, il faut que la valeur des actions après le projet soit au moins supérieure à celle des actions avant la réalisation de ce projet, c'est à dire : $C_1 > C_0$. Or :

$$C_1 - C_0 = (V_1 - D_0 - I) - (V_0 - D_0) = V_1 - V_0 - I$$
$$\Rightarrow \quad C_1 - C_0 = (X / k) + (r.I / k - X / k) - I$$
$$\Rightarrow \quad C_1 - C_0 = I.[(r / k) - 1] > 0 \qquad ssi \qquad \underline{r > k}$$

ce qui explique l'origine du seuil de référence utilisé pour déterminer si le TRI d'un projet est ou non suffisamment important pour que l'investissement considéré soit retenu par l'entreprise.

III.3. Représentation graphique de la théorie de M.M. (1958).

Etant donné l'ensemble des résultats obtenus ci-dessus, la théorie de M.M. dans sa version de 1958 peut être représentée de la manière suivante :



Ainsi, ce n'est pas le rendement total des capitaux qui augmente avec le niveau de l'endettement, mais la rentabilité exigée par les actionnaires, afin que le risque inhérent à la détention d'un actif plus risqué, soit compensée par une rentabilité espérée plus élevée.

III.4. Critique de la théorie de Modigliani et Miller (1958).

La théorie de M.M. de 1958, a été fondamentalement critiquée sur les points suivants :

- tout comme la théorie du bénéfice net, la théorie de M.M. ignore le fait que le coût de l'endettement augmente à mesure que l'entreprise devient de plus en plus risquée ;
- la théorie de M.M. se base essentiellement sur un raisonnement d'arbitrage qui est difficilement applicable dans la réalité, étant donné l'existence de coûts de transactions sur les marchés financiers.

Par conséquent, si la théorie de M.M. est tout à fait irréprochable sur le plan théorique, dans le cadre de marchés parfaits, elle est difficilement justifiable dans la réalité.

III.5. Prise en compte de la fiscalité : M.M. (1963).

En 1963, M.M. abandonnent l'hypothèse de perfection des marchés, et supposent que les sociétés subissent un impôt sur les bénéfices à un taux τ.

III.5.1. Impact de l'endettement sur la valeur de la firme en présence d'IS.

Nous considérons deux entreprises S_1 et S_2, de même bénéfice d'exploitation, toutes deux imposables, mais l'une endettée et l'autre non :

Société S_1	**Société S_2**
$V_1 = C_1$	$V_2 = C_2 + D$
X = bénéfice d'exploitation	X = bénéfice d'exploitation
$V_1 = X.(1 - \tau) / k_1^{\tau}$	$V_2 = [(X - k_d.D).(1 - \tau) + k_d.D] / k_2^{\tau}$

où, la valeur de chaque firme est une valeur de marché qui se définit par la rémunération offerte aux bailleurs de fonds, rapportée à la rentabilité exigée par ces derniers, k_2^τ. En partant de V_2, nous avons :

$$V_2 = [(X - k_d.D).(1 - \tau) + k_d.D] / k_2^\tau$$
$$\Rightarrow \quad V_2 = [X.(1 - \tau) - k_d.D + k_d.D.\tau + k_d.D] / k_2^\tau$$
$$\Rightarrow \quad V_2 = [X.(1 - \tau) + k_d.D.\tau] / k_2^\tau$$

Cette transformation de V_2, nous permet de mettre en évidence deux termes distincts :

- $X.(1 - \tau)$, un terme aléatoire qui correspond exactement sur le marché à la rémunération des actionnaires de la société S_1 ;
- et $k_d.D.\tau$, un terme certain relatif aux économies d'impôts obtenues grâce au choix de la société S_2 de se financer par des dettes.

Sur un marché en équilibre, c'est à dire sur un marché où il ne doit pas exister d'opportunités d'arbitrage :

- $X.(1 - \tau)$ doit être rémunéré par le même taux que celui exigé par les actionnaires de la société S_1, $k_{c1}^\tau = k_1^\tau$;
- et $k_d.D.\tau$ ne peut être rémunéré qu'au taux certain k_d : sur un marché parfait, il n'existe qu'un taux d'intérêt unique et constant, k_d.

Donc, sur un marché en équilibre, nous devons nécessairement avoir l'égalité suivante :

$$V_2 = [X.(1 - \tau) / k_1^\tau] + [k_d.D.\tau / k_d]$$
$$\Rightarrow \quad V_2 = V_1 + D.\tau$$

où, le gain provenant de l'endettement, $D.\tau$, est appelé « économie d'impôt » perpétuelle.

$D.\tau$ étant un terme positif, nous pouvons conclure, qu'en présence d'imposition, la valeur de la firme est une fonction croissante de l'endettement, ce qui signifie inversement que le coût du capital en présence d'imposition est une fonction décroissante de L.

III.5.2. Détermination des différents coûts en présence d'IS.

En reconsidérant les deux sociétés S_1 et S_2, leurs différents coûts de capitaux sont :

Société S_1	**Société S_2**
$V_1 = C_1$	$V_2 = C_2 + D$
X = bénéfice d'exploitation	X = bénéfice d'exploitation
$k_d^\tau = 0$	$k_d^\tau = k_d.(1 - \tau)$
$k_{c1}^\tau = X.(1 - \tau) / C_1$	$k_{c2}^\tau = [(X - k_d.D).(1 - \tau)] / C_2$
$k_1^\tau = X.(1 - \tau) / V_1 = k_{c1}^\tau$	$k_2^{\tau}{}' = [k_{c2}^\tau.C_2 / V_2] + [k_d^\tau.D / V_2]$

Il est très important de noter que le taux $k_2^{\tau}{}'$ déterminé par l'expression ci-dessus est le coût moyen pondéré du capital de la société S_2. De ce fait, il ne correspond absolument pas au taux de rentabilité global k_2^τ déterminé dans le paragraphe III.5.1. puisqu'en présence d'imposition sur les bénéfices, nous savons que le coût de l'endettement de l'entreprise ne correspond plus à la rémunération des prêteurs.

III.5.3. Variation des coûts de capital en fonction de l'endettement en présence d'IS.

III.5.3.1. Variation du coût des fonds propres.

M.M. montrent qu'à l'équilibre, le coût des fonds propres de la société endettée, S_2, se détermine de la manière suivante à partir de celui de la société, S_1, non endettée :

$$k_{c2}^{\tau} = [(X - k_d.D).(1 - \tau)] / C_2$$
$$\Rightarrow \quad k_{c2}^{\tau} = [X.(1 - \tau) - k_d.D.(1 - \tau)] / C_2$$
$$\Rightarrow \quad k_{c2}^{\tau} = [V_1.\ k_{c1}^{\tau} - k_d.D.(1 - \tau)] / C_2$$

Sachant que l'équilibre se traduit par :

$$V_2 = V_1 + D.\tau$$
$$\Rightarrow \quad V_1 = V_2 - D.\tau = C_2 + D.(1 - \tau)$$

En remplaçant V_1 par sa valeur ainsi déterminée dans l'expression de k_{c2}^{τ}, nous obtenons :

$$k_{c2}^{\tau} = k_{c1}^{\tau}.[(C_2 + D.(1 - \tau)) / C_2] - [k_d.D.(1 - \tau)] / C_2$$
$$\Rightarrow \quad k_{c2}^{\tau} = k_{c1}^{\tau} + k_{c1}^{\tau}.[D.(1 - \tau) / C_2] - [k_d.D.(1 - \tau)] / C_2$$
$$\Rightarrow \quad k_{c2}^{\tau} = k_{c1}^{\tau} + [k_{c1}^{\tau} - k_d].(1 - \tau).D / C_2$$

On en conclut que le coût des fonds propres demeure une fonction croissante de l'endettement ($k_{c2}^{\tau} > k_{c1}^{\tau}$) même lorsqu'on se place dans le cadre d'une économie imposée.

III.5.3.2. Variation du CMP du capital en fonction de l'endettement.

Nous savons que le CMP du capital d'une société endettée et imposée est k_2^{τ}'/ :

$$k_2^{\tau}{}' = [k_{c2}^{\tau}.C_2 / (C_2 + D)] + [k_d^{\tau}.D / (C_2 + D)]$$

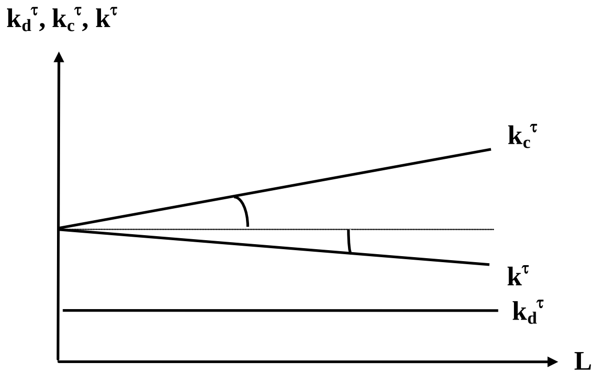
En remplaçant k_{c2}^{τ} par sa valeur d'équilibre déterminée ci-dessus et k_d^{τ} par $k_d.(1 - \tau)$, nous obtenons :

$$k_2^{\tau}{}' = [k_1^{\tau} + [k_1^{\tau} - k_d].(1 - \tau).D / C_2].[C_2 / V_2)] + [k_d.(1 - \tau).D / V_2]$$
$$\Rightarrow \quad k_2^{\tau}{}' = [k_1^{\tau}.C_2/V_2] + [k_1^{\tau}.D/V_2] - [k_1^{\tau}.\tau.D/V_2] - [k_d.(1 - \tau).D/V_2] + [k_d.(1 - \tau).D/V_2]$$
$$\Rightarrow \quad k_2^{\tau}{}' = [k_1^{\tau}.(C_2 + D) / V_2] - [k_1^{\tau}.\tau.D / V_2]$$
$$\Rightarrow \quad k_2^{\tau}{}' = [k_1^{\tau}.V_2 / V_2] - [k_1^{\tau}.\tau.D / V_2]$$
$$\Rightarrow \quad k_2^{\tau}{}' = k_1^{\tau} - [k_1^{\tau}.\tau.D / V_2]$$
$$\Rightarrow \quad k_2^{\tau}{}' = k_1^{\tau}.(1 - \tau.D / V_2)$$

Cette équation prouve que le coût moyen pondéré du capital n'est plus indépendant de la structure du capital : il est en réalité, une fonction décroissante du levier d'endettement L.

III.5.4. Représentation graphique de la théorie de M.M. (1963).

En présence d'impôt, les résultats de M.M. peuvent être représentés de la manière suivante :



Ainsi, même si l'endettement n'est plus neutre, il n'existe toujours pas selon M.M. de structure financière optimale pour l'entreprise. On retrouve ainsi, le résultat de la théorie du bénéfice net qui stipule que toute firme soit s'endetter au maximum possible, sans pour autant parvenir à atteindre une valeur minimale finie au niveau de son coût du capital.

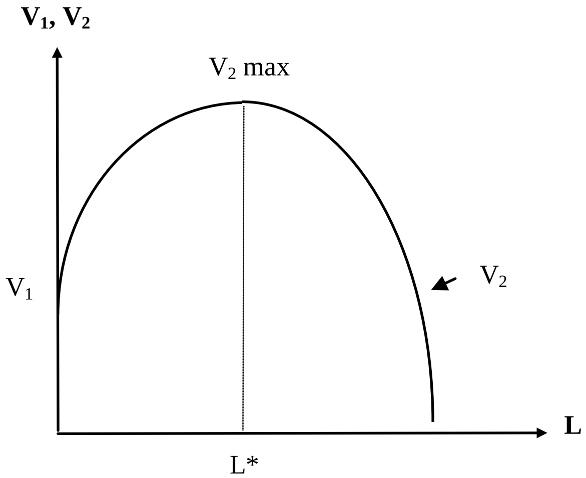
III.5.5. Critique de la théorie de M.M. (1963).

La théorie de M.M. de 1963 met l'accent sur l'effet positif de l'endettement (amélioration de la rentabilité des fonds propres, k_c^τ), mais oublie qu'un excès d'endettement est en même temps générateur de charges financières importantes, pouvant conduire l'entreprise à la faillite.

Ainsi, la formulation correcte de la valeur de la firme devrait être plutôt la suivante :

$V_2 = V_1 + D.\tau$ - le « coût » de la faillite potentielle

Cette expression signifie que plus l'entreprise s'endette, plus sa valeur augmente, mais qu'à partir du moment où le coût de faillite dépasse les économies d'impôts, elle a tout intérêt à ne plus s'endetter davantage, comme le montre le graphique suivant :



Ce schéma est non seulement plus réaliste que la version de M.M. de 1963, mais il implique surtout qu'il existe bel et bien une structure financière optimale, L*, correspondant à un endettement maximal et définissant nécessairement, un coût de capital minimal.

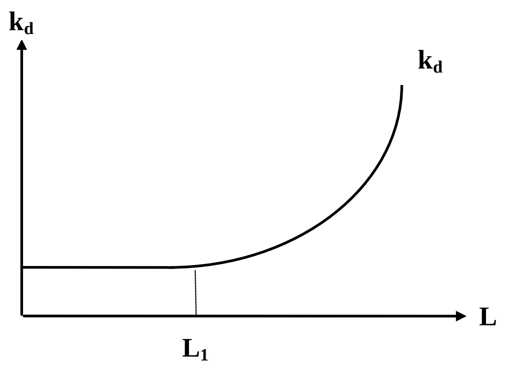
IV. La théorie traditionnelle.

La théorie traditionnelle, doit son appellation au fait qu'elle a précédé toutes les autres théories en matière de structure financière. Malgré ce fait, elle demeure la théorie qui décrit le mieux le comportement des entreprises et des marchés financiers, tels qu'ils sont observés dans la réalité. Alors que les deux théories précédentes font des hypothèses sur la relation qui existe entre k_c, k_d, k et le levier L, hypothèses qu'ils essaient de justifier théoriquement, la théorie classique, part au contraire de fonctions proches de celles réelles, c'est à dire de comportements raisonnables, pour en déduire les conséquences sur la valeur de la firme.

IV.1. Le comportement des prêteurs vis à vis de l'endettement.

Les prêteurs ne sont pas du tout indifférents au niveau d'endettement de l'entreprise. Au contraire, à partir d'un certain seuil, ils jugent que l'entreprise commence à être trop endettée, donc trop risquée, et exigent en conséquence, une rémunération plus élevée.

Ainsi, le coût de l'endettement est constant jusqu'à un certain seuil, puis devient une fonction croissante du levier L, au delà de ce point critique, ce qui se traduit par le schéma suivant :



Ainsi, pour :

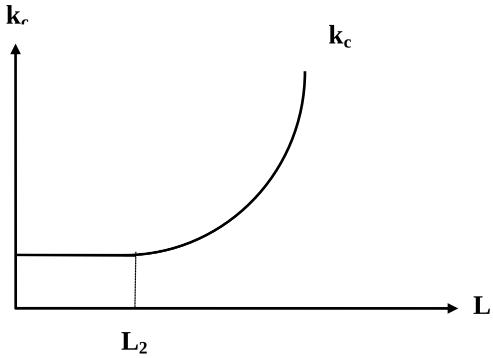
- $0 \leq L \leq L_1$: les prêteurs considèrent que le niveau de l'endettement est raisonnable; ils exigent donc une rémunération k_d, constante par rapport à L ;
- $L > L_1$: les prêteurs perçoivent une aggravation du risque financier encouru par la firme, du fait de l'augmentation de ses charges financières. Ils exigeront donc, une rémunération de plus en plus élevée.

IV.2. Le comportement des actionnaires vis à vis de l'endettement.

Pour décrire le comportement des actionnaires, la théorie traditionnelle propose une analyse voisine à celle faite au niveau de l'attitude des prêteurs : les actionnaires sont sensibles à l'augmentation de l'endettement, et exigent en contrepartie de ce risque supplémentaire, un rendement plus élevé pour leurs capitaux. Partant de ce principe, plusieurs versions ont été offertes par la théorie financière, pour décrire le comportement des actionnaires.

IV.2.1. Première formulation.

Elle est identique à l'analyse faite au niveau du comportement des prêteurs : jusqu'à un certain niveau d'endettement jugé raisonnable, les actionnaires ne réagissent pas à l'augmentation de l'endettement dans la structure financière de l'entreprise, mais au delà de ce niveau, toute endettement supplémentaire leur devient néfaste et les pousse à exiger une rentabilité plus élevée, comme le montre le schéma suivant :

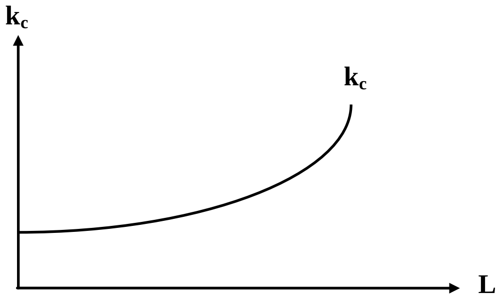


Pour :

- $0 \leq L \leq L_2$: le coût des capitaux propres k_c, est constant, tant que le taux d'endettement ne dépasse pas un certain niveau L_2 ;
- au delà de ce niveau, le coût des fonds propres devient une fonction croissante de L.

IV.2.2. Deuxième formulation.

Le 2^e courant de penseurs, tend à croire que les actionnaires sont sensibles dès le début à l'augmentation du niveau d'endettement, et que cette sensibilité s'accroît à mesure que le financement par les dettes devient plus important, comme l'indique le schéma ci-dessous :



Ce schéma traduit le comportement d'actionnaires très averses au risque puisque ces derniers réagissent immédiatement à toute augmentation de l'endettement.

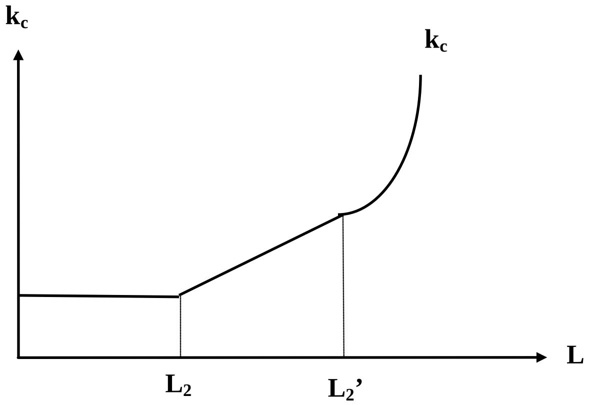
IV.2.3. Troisième formulation.

Proposée par Ezra Solomon, cette formulation distingue trois stades d'évolution de k_c :

- 1ère zone : pour des niveaux d'endettement modérés tels que $0 \leq L \leq L_2$, le coût des fonds propres, k_c, est constant ;
- 2^e zone : pour un niveau d'endettement tel que $L_2 < L \leq L_2'$, les actionnaires commencent à réagir à l'accroissement de l'endettement, et exigent une rémunération croissante en fonction du levier. Cependant, comme l'accroissement du risque est modéré, le coût k_c n'est qu'une fonction linéaire de L ;

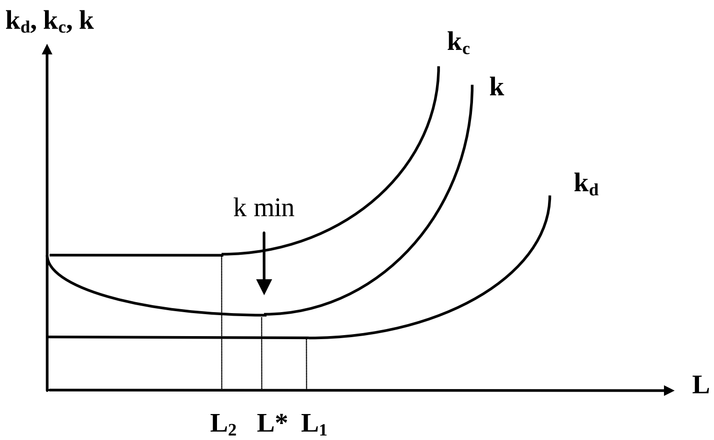
- 3^e zone : pour $L > L_2'$, les actionnaires jugent qu'un seuil critique a été franchi, et augmentent par conséquent sans cesse, leurs exigences en matière de rendement, à mesure que L s'élève. La rémunération k_c qu'ils exigent, est alors une fonction croissante plus que linéaire de L.

Cette 3^e formulation du coût des fonds propres se présente donc comme suit :



IV.3. Evolution du coût global du capital.

Si nous retenons par exemple, la première formulation de l'évolution du coût des fonds propres, le coût global de financement de l'entreprise peut alors être représenté comme suit :



Ainsi, dans le cadre des hypothèses retenues, il s'avère que :

- dans l'intervalle [0, L_2], aussi bien le coût des fonds propres que celui des dettes, sont constants, ce qui correspond aux hypothèses de la théorie du bénéfice net : l'entreprise est encore dans une zone où l'endettement lui rapporte plus qu'il ne lui coûte, ce qui a un impact positif sur la valeur de la firme (augmentation) et le coût du capital (baisse) ;
- dans l'intervalle [L_2, L*[, le coût des dettes reste constant, car les prêteurs jugent que l'entreprise se trouve toujours dans une zone d'endettement tolérable, alors que le rendement exigé par les actionnaires commence à augmenter, réduisant ainsi, la diminution du coût global, qui ralentit sa baisse, même s'il continue à diminuer ;
- au point L*, l'entreprise atteint sa structure optimale, qui lui garantit un coût global du capital minimal ;

- au delà du niveau L*, l'influence néfaste exercée par l'augmentation du coût des fonds propres, l'emporte sur les bienfaits de l'endettement, et le coût de financement global de l'entreprise sera d'autant plus élevé que celle-ci aggrave son niveau d'endettement.

Remarque :

Il faut noter que L_2 est nécessairement inférieur à L_1, car le risque encouru par les actionnaires, est plus élevé que celui supporté par les prêteurs. Il est donc normal, qu'ils commencent à réagir plus tôt à l'augmentation du risque provenant de l'augmentation de l'endettement.

Conclusion :

Il s'avère au vu de tous les développements précédents, qu'il n'est pas aisé de donner une réponse précise mais surtout définitive, au problème d'existence d'une structure de financement optimale. Selon la théorie dans le cadre de laquelle on se place, les résultats sont tout à fait différents, voire contradictoires.

Applications

Application 1 :

On considère une entreprise dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Résultat d'exploitation : X = 1.200
- Niveau d'endettement : D = 1000 au taux de 8%
- Coût actuel des capitaux propres : 14%

Sachant que la société n'est pas imposée au titre de ses bénéfices :

1°- Déterminer la valeur des fonds propres de cette société sur le marché. En déduire le coût moyen pondéré (CMP) du capital et la structure financière correspondante.
2°- En supposant que l'entreprise emprunte une somme supplémentaire de 2.000 à 8%, et qu'elle rachète des actions pour le même montant, que deviennent alors la structure financière de la société et son coût du capital ?

Corrigé :

1°- $k = [k_c.C / (C + D)] + [k_d.D / (C + D)]$

avec C / : $k_c = BN / C = (X - k_d.D) / C$

$\Rightarrow$ $C = (X - k_d.D) / k_c$
$\Rightarrow$ $C = (1.200 - 8\%*1.000) / 14\% = 8.000$

$\Rightarrow$ $k = [14\%*8.000 / 9.000] + [8\%*1.000 / 9.000] = 13,33\%$

et $L = D / C = 1.000 / 8.000 = 0,125$

2°- $\begin{cases} C' = 6.000 & \Rightarrow C' + D' = 9.000 \\ D' = 3.000 & \Rightarrow L = D' / C' = 3.000 / 6.000 = 0,5 \end{cases}$

$k'_c = BN' / C' = (1.200 - 8\%*3.000) / 6.000 = 16\%$

On remarque que lorsque l'endettement (ou L) a augmenté :

- le coût des dettes est resté constant ;
- le coût des fonds propres a augmenté.

Ces deux hypothèses correspondent à la thèse de Modigliani et Miller sans impôt, qui prévoit que le coût moyen pondéré du capital ne doit pas varier. Nous vérifions bien que :

$k' = [k'_c.C' / (C' + D')] + [k'_d.D' / (C' + D')]$
$\Rightarrow$ $k' = [16\%*6.000 / 9.000] + [8\%*3.000 / 9.000] = 13,33\% = k$

<u>Application 2</u> :

Deux sociétés A et B appartenant à la même classe de risque se caractérisent comme suit :

	Société A	**Société B**
Nombre d'actions	60.000	40.000
Valeur nominale de l'action	100	100
Cours de l'action	120	142
Valeur nominale des obligations	-	2.000.000
Cours de l'obligation	-	Pair
Taux d'intérêt nominal des obligations	-	0,07
Bénéfice avant intérêts et impôts	720.000	720.000

Chaque société distribue la totalité de son bénéfice. On admet en outre, la théorie de Modigliani et Miller en l'absence d'impôt.

1°- Un investisseur possède 800 actions B. A-t-il avantage à conserver ses titres, ou à les arbitrer contre des actions A, en empruntant de manière à obtenir le même ratio d'endettement que la firme B ?
2°- Calculer pour chaque société, le coût moyen pondéré du capital et celui des fonds propres.
3°- a/ En admettant que le cours de l'action A soit un prix d'équilibre, quel doit être le cours de l'action B pour que l'ensemble du marché soit en équilibre ?
b/ Indiquer les taux de capitalisation de chaque titre pour les deux sociétés. Commenter.

<u>Corrigé</u> :

1°- <u>Mise en évidence de l'éventuelle opportunité d'arbitrage</u>.

L'investisseur détient 400 actions de B, soit un capital s_B / :

s_B = 800*142 = 113.600

Le revenu procuré par ces actions est y_B / :

- Bénéfice net de la société B = 720.000 - 7%*2.000.000 = 580.000
- Pourcentage d'actions détenues par l'investisseur = 800 / 40.000 = 2%
- Revenu de l'actionnaire dans B = y_B = 2%*580.000 = 11.600

Etant donné que l'investisseur possède 2% du capital de B, il doit, pour en reproduire la structure, emprunter 2% également de la dette de B, soit un endettement personnel de :

2%*2.000.000 = 40.000

L'investisseur dispose ainsi d'un montant total de :

113.600 + 40.000 = 153.600

qu'il doit investir dans A :

- Pourcentage de capital détenu dans A = (153.600 / 60.000*120) = 2,133%
- Revenu procuré par la participation dans A = y_A / :

y_A = 2,133%*720.000 - 7%*40.000 = 12.560

<u>Conclusion</u> : 12.560 > 11.600 $\Rightarrow$ oui, il existe une opportunité d'arbitrage qui rapporte 960.

2°- Taux de capitalisation des sociétés A et B :

Société A : $kc_A = 720.000 / 7.200.000 = 10\%$
$k_A = kc_A = 10\%$

Société B : $kc_B = 580.000 / (40.000*142) = 10,21\%$
$k_B = [10,21\%*5.680.000 + 7\%*2.000.000] / 7.680.000 = 9,37\%$

On a 9,37% ≠ 10% (k_A), ce qui prouve bien selon M.M. que le marché est en déséquilibre.

3°- a/ Prix d'équilibre de l'action B :

Marché en équilibre selon MM en absence d'impôt :

$\Rightarrow \quad V_A = V_B = C_B + D_B$
$\Rightarrow \quad C_B = V_A - D_B$
$\Rightarrow \quad C_B = 7.200.000 - 2.000.000 = 5.200.000$

Prix de l'action B à l'équilibre :

$P_B = C_B$ / nombre d'actions de B = 5.200.000 / 40.000 = 130

b/ Taux de capitalisation des société A et B :

Société A : $kc_A = 10\%$: inchangé
$k_A = 10\%$: inchangé

Société B : $kc_B = 580.000 / (40.000*130) = 11,15\%$
$k_B = [11,15\%*5.200.000 + 7\%*2.000.000] / 7.200.000 = 10\% = k_A$

Si on reprend le raisonnement d'arbitrage ci-dessus, on aura un profit d'arbitrage nul.

Application 3* :

Le coût de la dette de la société S s'exprime par la relation suivante :

$$k_d = \begin{cases} \theta & \text{si } 0 \leq L \leq 1 \\ \theta + \delta.(L - 1) & \text{si } L \geq 1 \end{cases}$$

Le coût des fonds propres est de la forme :

$$k_c^\tau = \begin{cases} \alpha & \text{si } 0 \leq L \leq 1 \\ \alpha + \beta.(L - 1)^2 & \text{si } L \geq 1 \end{cases}$$

où, α, β, δ et θ sont des constantes positives avec $\alpha > \theta$.

1°- a/ Exprimer en fonction des paramètres α, β, δ et θ, du taux d'imposition, τ, et du levier financier L, le coût du capital avant impôt.
b/ Déterminer la structure financière optimale quand elle existe et le coût du capital avant impôt correspondant pour : $\alpha = 18\%$; $\beta = 1\%$; $\delta = 2\%$, $\theta = 12\%$ et $\tau = 45\%$.

2°- Représenter graphiquement l'évolution de k_c, k_d et k quand le levier L varie de 0 à 4.

<u>Corrigé</u> :

1°- On a : $k = k_c / (1 + L) + k_d.L / (1 + L)$

avec : $k_c = BAI / C = (X - k_d.D) / C$
$k_c^{\tau} = BN / C = (X - k_d.D).(1 - \tau) / C = k_c.(1 - \tau)$

$\Rightarrow$ $k_c = k_c^{\tau} / (1 - \tau)$
$\Rightarrow$ $k = [k_c^{\tau} / (1 - \tau)] / (1 + L) + k_d.L / (1 + L)$

<u>1^er cas</u> : $0 \leq L \leq 1$

$\Rightarrow$ $k = [\alpha / (1 - \tau)] / (1 + L) + \theta.L / (1 + L)$

k_d et k_c sont tous les deux constants, donc nous sommes dans le cadre de la théorie du bénéfice net, ce qui implique qu'il n'existe pas de structure financière optimale finie, ni de coût moyen pondéré du capital minimal. On ne peut que tendre vers cette structure en maximisant les dettes; en effet :

$k = [\alpha / (1 - \tau)] / (1 + L) + \theta.L / (1 + L)$
$\Rightarrow$ $\partial k/\partial L = [(-\alpha / (1 - \tau)) + \theta] / (1 + L)^2$

Or cette dérivée est nécessairement strictement négative puisque nous avons par hypothèse :

$\alpha > \theta$
$\Rightarrow$ $\alpha / (1 - \tau) > \alpha > \theta$

<u>2^e cas</u> : $L \geq 1$

k_d et k_c n'obéissent ni aux hypothèses de la théorie du bénéfice net ni à celles de la théorie du bénéfice d'exploitation : donc, il s'agit de l'un des cas particuliers de la théorie traditionnelle.

Pour savoir s'il existe un coût moyen pondéré optimal du capital et donc, un levier optimal, il faut dériver k par rapport à L et annuler cette dérivée :

$\Rightarrow$ $k = [(\alpha + \beta.(L - 1)^2) / (1 - \tau)] / (1 + L) + [(\theta + \delta.(L - 1)).L] / (1 + L)$

$\Rightarrow$ $k = [\alpha / (1 - \tau)] / (1 + L) + [\beta / (1 - \tau)].[(L - 1)^2 / (1 + L)]$
$+ [(\theta / (1 + L)] + [\delta.(L - 1).L] / (1 + L)$

$\Rightarrow$ $\partial k/\partial L = [[-\alpha / (1 - \tau)] + [\beta / (1 - \tau)].[2.(L - 1).(1 + L) - (L - 1)^2]$
$+ [(\theta.((1 + L) - L)] + [\delta.((2L - 1).(1 + L) - L.(L - 1))]] / (1 + L)^2 = 0$

$\Rightarrow$ $\partial k/\partial L= [[-\alpha / (1 - \tau)] + [\beta / (1 - \tau)].[L^2 +2L - 3)] + [\theta] + [\delta.(L^2 + 2L - 1]]/(1 + L)^2 = 0$

$\Rightarrow$ $[(\beta / (1 - \tau)) + \delta].L^2 + 2.[\beta / (1 - \tau) + \delta].L - [\alpha / (1 - \tau)] - [3\beta / (1 - \tau)] + \theta - \delta = 0$

<u>Application numérique</u> :

$\Rightarrow$ $(2,1 / 55).L^2 + (4,2 / 55).L - 15,5 / 55 = 0$
$\Rightarrow$ $21L^2 + 42L - 155 = 0$

C'est une équation du second degré en L dont il faut calculer le discriminant :

$\Delta = (121,59)^2 > 0$

ce qui signifie qu'il existe deux solutions distinctes :

$L_1 = (- 42 - 121{,}59) / 42 = -3{,}895 < 0$: impossible pour L
$L_2 = (- 42 + 121{,}59) / 42 = 1{,}895 \geq 1$: solution acceptable ($1{,}895 \in [1, +\infty[$)

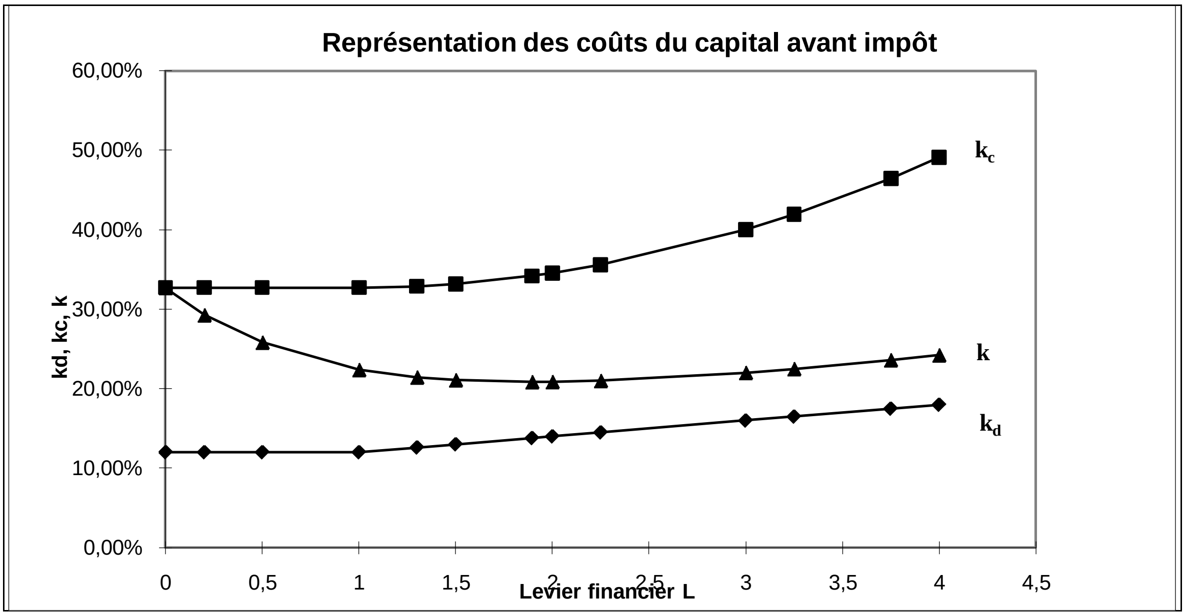
Conclusion, le levier optimal est L = 1,895.

En remplaçant L par sa valeur dans l'équation de k :

$$k = [\alpha / (1 - \tau)] / (1 + L) + [\beta / (1 - \tau)] / [(L - 1)^2 / (1 + L)] + [(\theta / (1 + L)] + [\delta.(L - 1).L] / (1 + L)$$

on trouve k = 20,83% : c'est le coût moyen pondéré minimal du capital.

2°- Représentation graphique :



Application 4 :

On donne les renseignements suivants concernant deux sociétés A et B qui appartiennent à la même classe de risque :

	Société A	Société B
Nombre d'actions	60.000	40.000
Valeur de marché des actions	7.000.000	6.400.000
Valeur nominale des obligations	-	2.000.000
Cours de l'obligation	-	Pair
Taux d'intérêt nominal des obligations	-	8%
Bénéfice avant intérêts et impôts	1.200.000	1.200.000
Taux de l'impôt sur les bénéfices	**50%**	**50%**

Chaque société distribue intégralement le bénéfice après impôt. Dans l'optique de Modigliani et Miller avec impôt :

1°- Calculer pour chaque société, le dividende par action, le coût des fonds propres, le coût moyen pondéré du capital et la rentabilité exigée par l'ensemble des bailleurs de fonds.

2°- En considérant un investisseur qui détient 1.000 actions dans la société B et en faisant abstraction de l'impôt sur le revenu des personnes physiques, démontrer que cet investisseur a intérêt à arbitrer ses actions dans B contre des actions dans A.
3°- Déterminer le cours d'équilibre de l'action A, en admettant que le cours de l'action B ait atteint son cours d'équilibre.
4°- Déterminer le cours d'équilibre de l'action B, en admettant cette fois, que le cours de l'action A ait atteint son prix d'équilibre.
5°- En supposant que la société B est libre de dettes (dettes nulles) et en admettant que le cours de l'action A ait atteint son cours d'équilibre, déterminer ce que devrait être le cours de la société B.

Corrigé :

1°- Détermination du bénéfice par action.

	Société A	**Société B**
Bénéfice d'exploitation	1.200.000	1.200.000
Frais financiers	0	8%*2.000.000 = 160.000
Bénéfice imposable	1.200.000	1.040.000
Impôt sur les bénéfices	50%*1.200.000 = 600.000	50%*1.040.000 = 520.000
Bénéfice net = Dividendes	600.000	520.000
Bénéfice par action	600.000/60.000 = 10	520.000/40.000 = 13

Détermination du coût des fonds propres.

Société A $kc_A^\tau = BN_A / C_A = k_A^\tau = 8{,}57\%$

Société B $kc_B^\tau = BN_B / C_B = 520.000 / 6.400.000 = 8{,}125\%$

Détermination du coût moyen pondéré du capital.

Société A $k_A^\tau = BN_A / V_A = 600.000 / 7.000.000 = 8{,}57\% = kc_A^\tau$

Société B $k_B^\tau = (kc_B^\tau.C + kd^\tau.D) / V_B$
$= (8{,}125\%*6.400.000 + 8\%*(1 - 0{,}5)*2.000.000) / 8.400.000$
$= 7{,}14\%$

Détermination de la rentabilité globale exigée par les bailleurs de fonds.

Société A $k_A^\tau = BN_A / V_A = 600.000 / 7.000.000 = 8{,}57\% = kc_A^\tau$

Société B $k_B^\tau = (BN_B + kd.D) / V_B = (520.000 + 160.000) / 8.400.000 = 8{,}095\%$

2°- Mise en évidence de l'opportunité d'arbitrage.

Un investisseur possède 1.000 actions de B, c.à.d. un montant de 1.000*6.400.000 / 40.000 = 160.000.

Les 1.000 actions représentent 1.000 / 40.000 soit 2,5% du capital de la société B et rapportent à l'investisseur 1.000*13 = 13.000.

Pour effectuer le raisonnement d'arbitrage, l'investisseur doit emprunter 2,5%.D.(1 - τ), soit un montant de : 2,5%*2.000.000*(1 - 0,5) = 25.000.

Le montant global à placer en A est donc de : 160.000 + 25.000 = 185.000. Il représente 185.000 / 7.000.000 = 2,64% du capital de la société A et rapporte 2,64%*600.000 = 15.857,14.

Etant endetté, l'investisseur doit payer des intérêts pour un montant de : 8%*25.000 = 2.000, ce qui laisse un revenu net de ses placements dans A de : 15.857,14 - 2.000 = 13.857,14.

13.857,14 > 13.000, donc oui, il y a une opportunité d'arbitrage et le gain est de 857,14.

3°- Détermination du cours de l'action de la société A à l'équilibre.

Nous savons qu'en présence d'impôts Modigliani et Miller trouvent que : $V(B) = V(A) + D.\tau$

Par conséquent : $V(A) = V(B) - D.\tau$ = 8.400.000 - 2.000.000*0,5 = 7.400.000. Donc, le cours de l'action de A est de : 7.400.000 / 60.000 = 123,333.

4°- Détermination du cours de l'action de la société B à l'équilibre.

Nous partons toujours de la même formule : $V(B) = V(A) + D.\tau$

Par conséquent : $V(B) = V(A) + D.\tau$ = 7.000.000 + 2.000.000*0,5 = 8.000.000. Donc, le cours de l'action de B est de : (8.000.000 - 2.000.000) / 40.000 = 150.

5°- Détermination du cours de l'action de la société B à l'équilibre.

La société B est libre de dettes (D = 0), donc, sa valeur à l'équilibre doit être identique à celle de la société A, soit : V(B) = V(A) + 0 = 7.000.000. Donc, le cours de l'action de B est de : 7.000.000 / 40.000 = 175.

CHAPITRE N° 6

LA THEORIE DE LA STRUCTURE FINANCIERE DE LA FIRME :
LA POLITIQUE DES DIVIDENDES

I. Introduction au concept de politique des dividendes.

La politique choisie par la firme au niveau de la distribution des dividendes, est le second outil dont dispose l'entreprise pour aboutir à une structure financière optimale. Contrairement au chapitre précédent où nous avons supposé que pour un niveau de capitaux propres donné, l'entreprise faisait varier son niveau d'endettement, nous supposons ici, que le niveau des dettes est constant, et que c'est le niveau des fonds propres qui déterminera la structure optimale de l'entreprise, quand celle-ci existe.

Dans ce sens, la notion de politique des dividendes traduit le choix que doit faire l'entreprise, entre :

- le versement des bénéfices aux actionnaires afin de les rémunérer de leur participation au capital ;
- ou la constitution de réserves, dans l'objectif de financer la croissance de l'entreprise.

Si ces deux actions sont bien entendu souhaitables, de la part de la firme, elles sont malheureusement antagonistes : toute augmentation de réserves se fait au détriment des dividendes, et inversement, même si ce conflit se trouve atténué par le fait que l'accumulation du capital sous forme de réserves, soit une source de gains à long terme.

Partant de ces constats, plusieurs modèles ont été développés, qui s'insèrent dans le cadre de deux grands courants théoriques :

- l'école traditionnelle : cette école affirme que les actionnaires préfèrent les dividendes aux gains en capital. Ainsi Gordon (1963) par exemple, part du fait que les investisseurs sont en général averses au risque, pour dire qu'un dividende reçu maintenant, est moins risqué qu'un gain en capital appelé à être perçu dans le futur. Cette préférence, implique que plus l'entreprise distribue des dividendes, plus elle fait augmenter sa valeur boursière ;
- les partisans de la neutralité de la politique des dividendes : la thèse la plus significative sur la neutralité des dividendes, a été proposée par Modigliani et Miller (1961). Ces deux chercheurs, affirment que la décision d'investissement de la firme, étant donné, le taux de distribution des dividendes est un simple détail qui n'affecte en rien la richesse des actionnaires.

II. Neutralité de la politique des dividendes : la thèse de Modigliani et Miller.

Partant de l'idée de la neutralité de la politique des dividendes, M.M. démontrent que la valeur de la firme n'est déterminée que par la capacité bénéficiaire de ses actifs et sa politique d'investissement, et que par conséquent, la façon dont les bénéfices sont répartis entre les dividendes et les réserves, n'a strictement aucune incidence sur cette valeur.

II.1. Les hypothèses de M.M. (1961).

La théorie de M.M. est basée sur les hypothèses suivantes :

- les marchés des capitaux sont efficients : l'information est disponible et gratuite pour tous les investisseurs ;
- il n'y a ni imposition, ni coût de transactions, ni frais d'émission ;
- les investisseurs sont rationnels (donc indifférents entre un gain en capital et un gain en dividendes) ;
- la politique d'investissement de la firme est donnée et invariable ;
- l'environnement est certain, c'est à dire qu'aussi bien les programmes d'investissement, que les bénéfices futurs sont connus d'avance. Il y a donc, absence de tout risque économique ou financier.

II.2. Le modèle de M.M. (1961).

II.2.1. La logique du modèle.

L'argument central de la démonstration de M.M. est qu'au moment où la firme prend la décision d'investir, elle doit également décider soit de conserver ses bénéfices, soit de payer des dividendes, et par conséquent, d'augmenter son capital en émettant de nouvelles actions, d'un montant égal aux dividendes distribués, afin de pouvoir financer ses investissements.

En d'autres termes, M.M. pensent que la diminution du prix de l'action sur le marché, due au recours au financement externe, est totalement compensée par l'augmentation de ce même prix suite au paiement du dividende. Par conséquent, l'actionnaire serait totalement indifférent entre la distribution de dividendes ou la rétention des bénéfices.

II.2.2. La notation du modèle.

On définit les variables suivantes :

- P_t = le prix de l'action au début de la période t
- N_t = le nombre d'actions au début de la période t avec $\Delta N_t = N_t - N_{t-1}$
- $V_t = N_t.P_t$ = la valeur de l'entreprise au début de la période t
- D_t = le dividende par action de la période t, versé à la fin de la période
- $D'_t = N_t.D_t$ = le dividende total pour la période t, versé en fin de période
- k_t = le coût des fonds propres sur la période t (identique pour toutes les entreprises)
- I_t = l'investissement net par action réalisé à la fin de la période t
- $I'_t = N_t.I_t$ = l'investissement net réalisé à la fin de la période t
- IB'_t = l'investissement brut réalisé à la fin de la période t
- A'_t = le montant des dotations aux amortissements de la période t
- B_t = le bénéfice net par action de la période t
- B'_t = le bénéfice net réalisé durant la période t

II.2.3. Démonstration du modèle.

Le but de cette démonstration est de parvenir à prouver que la valeur de l'entreprise (V_t) est totalement indépendante du montant du dividende qui a été ou non distribué (D_t).

Pour ce faire, M.M. partent de l'expression du coût des capitaux propres de l'entreprise, considéré simultanément comme un taux de rendement des fonds investis par les actionnaires :

$$k_t = (P_{t+1} - P_t + D_t) / P_t$$
$$\Rightarrow \quad k_t.P_t + P_t = P_{t+1} + D_t$$
$$\Rightarrow \quad (1 + k_t).P_t = P_{t+1} + D_t$$
$$\Rightarrow \quad P_t = (P_{t+1} + D_t) / (1 + k_t)$$

Or, sachant que :

$$V_t = N_t.P_t$$
$$\Rightarrow \quad V_t = (N_t.P_{t+1} + D'_t) / (1 + k_t)$$
$$\Rightarrow \quad V_t = [N_t.P_{t+1} + N_{t+1}.P_{t+1} - N_{t+1}.P_{t+1} + D'_t] / (1 + k_t)$$
$$\Rightarrow \quad V_t = [P_{t+1}.(N_t - N_{t+1}) + V_{t+1} + D'_t] / (1 + k_t)$$
$$\Rightarrow \quad V_t = [V_{t+1} + D'_t - \Delta N_t.P_{t+1}] / (1 + k_t)$$

D'après l'équation ci-dessus, V_t dépend directement de D'_t, et pourrait par ailleurs en dépendre indirectement s'il se trouve que les termes V_{t+1} ou $\Delta N_t.P_{t+1}$, sont eux aussi, fonctions de D'_t :

<u>1^er terme</u> : V_{t+1}

Nous avons :

$$V_t = [V_{t+1} + D'_t - \Delta N_t.P_{t+1}] / (1 + k_t)$$
$$\Rightarrow \quad V_{t+1} = [V_{t+2} + D'_{t+1} - \Delta N_{t+1}.P_{t+2}] / (1 + k_{t+1})$$

Ainsi, V_{t+1} ne dépend que des décisions de distribution des dividendes, des périodes t+1, t+2... Il est par conséquent, indépendant de D'_t, variable représentant le dividende de la période t.

<u>2^e terme</u> : $\Delta N_t.P_{t+1}$

Ce terme est quant à lui, dépendant de D'_t, puisque plus le dividende distribué, pendant la période t, est élevé, plus l'augmentation de capital nécessaire au financement des investissements sera importante. Donc, $\Delta N_t.P_{t+1}$, est une fonction croissante de D'_t.

<u>Conclusion</u> :

Il faut prouver que la variable D'_t comprise dans le terme $\Delta N_t.P_{t+1}$ se neutralise avec le terme D'_t présent dans l'expression de V_t; d'où, la nécessité d'étudier de plus près, la différence (D'_t - $\Delta N_t.P_{t+1}$).

Sachant que l'égalité des emplois et des ressources à la fin de la période t se déduit à partir du tableau suivant :

Emplois	**Ressources**
Investissement brut	Capacité d'autofinancement
Dividendes	Augmentation de capital

nous pouvons écrire :

$$IB'_t + D'_t = B'_t + A'_t + \Delta N_t.P_{t+1}$$

$$\Rightarrow \quad I'_t + D'_t = B'_t + \Delta N_t.P_{t+1}$$

$$\Rightarrow \quad D'_t - \Delta N_t.P_{t+1} = B'_t - I'_t$$

En remplaçant le terme (D'_t - $\Delta N_t.P_{t+1}$) par sa valeur dans l'expression de V_t, on obtient :

$$\Rightarrow \quad V_t = (V_{t+1} + B'_t - I'_t) / (1 + k_t)$$

Parvenus à ce stade, M.M. concluent que la valeur de la firme est bien indépendante de sa décision de distribution de dividendes sur cette même période. Mais ils poussent plus loin encore leur raisonnement, et finissent par trouver que la valeur de la firme n'est en fait affectée ni par le dividende de l'année considérée, ni par les décisions relatives aux dividendes futurs. En effet, nous avons :

$$V_{t+1} = [V_{t+2} + D'_{t+1} - \Delta N_{t+1}.P_{t+2}] / (1 + k_{t+1})$$

$$\Rightarrow \quad V_{t+1} = V_{t+2} / (1 + k_{t+1}) + (B'_{t+1} - I'_{t+1}) / (1 + k_{t+1})$$

$$\Rightarrow \quad V_t = [V_{t+2} / (1 + k_{t+1}) + (B'_{t+1} - I'_{t+1}) / (1 + k_{t+1})] / (1 + k_t) + (B'_t - I'_t) / (1 + k_t)$$

$$\Rightarrow \quad V_t = V_{t+2} / [(1 + k_t).(1 + k_{t+1})] + (B'_{t+1} - I'_{t+1}) / [(1 + k_t).(1 + k_{t+1})] + (B'_t - I'_t) / (1 + k_t)$$

Si nous reconduisons ce résultat sur plusieurs périodes, en écrivant V_{t+2} en fonction de V_{t+3}..., nous obtenons un terme V_{t+n}, qui sera actualisé au facteur K / :

$$K = (1 + k_t).(1 + k_{t+1})...(1 + k_{t+n-1})$$

Quand n ~> ∞, V_{t+n} ~> 0, et on obtient :

$$V_t = (B'_t - I'_t) / (1 + k_t) + (B'_{t+1} - I'_{t+1}) / [(1 + k_t).(1 + k_{t+1})] + ... + (B'_{t+n} - I'_{t+n}) / [(1 + k_t)...(1 + k_{t+n})]$$

Ainsi, M.M. parviennent à prouver que la valeur de la firme ne dépend que de ses bénéfices et de ses investissements, et qu'elle est tout à fait indépendante de sa politique de distribution.

Remarque :

Dans le cas particulier, où le taux de rentabilité, k_t, exigé par le marché est constant, la valeur de l'entreprise devient :

$$V_0 = \sum_{t=1}^{\infty} (B'_t - I'_t) / (1 + k)^t$$

II.3. Critique du modèle de M.M. (1961).

Plusieurs critiques ont été faites à l'encontre du modèle de M.M. de 1961 ; ainsi :

- certains critiques pensent que le résultat de neutralité de la politique des dividendes obtenu par M.M. découle directement de leur hypothèse d'environnement certain. Selon eux, le cadre incertain des marchés réels fait que les actionnaires ne soient pas du tout indifférents entre des gains en capital et des gains en dividendes : étant par nature averses au risque, ils préfèrent obligatoirement les dividendes.

Tenant compte de cette critique, M.M. abandonnent leur hypothèse de certitude totale, et considèrent en 1966, le cas de l'incertitude. Seulement là aussi, ils parviennent à prouver que la politique des dividendes est neutre. Leur conclusion est fondée sur l'argument familier de l'arbitrage : étant donné deux firmes qui ont exactement le même risque d'activité, les mêmes profits anticipés, et des politiques d'investissement semblables, les prix des deux firmes sur le marché doivent nécessairement être égaux. En effet, d'après M.M., l'évolution dans le temps de la politique de distribution des dividendes ne peut affecter la valeur de marché des deux firmes, car la somme de la valeur actuelle des dividendes anticipés et de la valeur finale, est la même pour les deux.

Notons cependant, que si ce raisonnement tient tout à fait sur le plan théorique, c'est essentiellement grâce à l'hypothèse de perfection des marchés de capitaux, qui permet le recours aux opérations d'arbitrage. Il suffirait alors, qu'il y ait des coûts de transactions, pour que l'hypothèse de neutralité de la politique de distribution des dividendes, soit remise en cause ;

- la seconde critique qui a été essentiellement faite à M.M. est reliée au problème d'incertitude et à la préférence qu'ont les investisseurs pour les gains en dividendes. Se basant sur la théorie de la signalisation, plusieurs chercheurs affirment que les dividendes représentent un vecteur d'informations. Cet argument suppose que les dividendes ont un effet positif sur le prix de l'action, donc sur la valeur de la firme, parce qu'ils donnent aux investisseurs une information sur la capacité bénéficiaire de l'entreprise.

  M.M. reconnaissent ce fait, mais affirment que ce sont les bénéfices actuels et futurs qui sont les déterminants de la valeur de la firme, et que les dividendes n'étant que le reflet de ces facteurs, ils ne déterminent pas eux-mêmes la valeur de la firme.

III. Importance de la politique des dividendes : l'école traditionnelle.

Partant du fait qu'elle a déjà démontré qu'il existait une politique d'endettement optimale, l'école traditionnelle soutient qu'il existe également et nécessairement, une politique optimale de distribution des dividendes, qui vise à maximiser la richesse des actionnaires.

III.1. Observations préliminaires.

Selon les partisans de l'école traditionnelle, la politique de dividendes optimale est fonction d'une part des opportunités d'investissement de la firme et d'autre part, de la préférence des actionnaires pour les dividendes, deux soucis qui s'avèrent souvent inconciliables… En effet :

- étant donné que l'augmentation de capital par émission d'actions nouvelles est une opération plus coûteuse que l'incorporation de réserves et étant donné par ailleurs, que les gains en capitaux (plus-values) sont dans la plupart des pays imposés à un taux moins élevé que les dividendes, les actionnaires en tant que propriétaires de la firme ne peuvent que préférer appliquer un taux de rétention élevé sur les bénéfices pour disposer des financements nécessaires à leurs projets d'investissement ;
- cependant, d'un autre côté, ces mêmes actionnaires en tant qu'investisseurs averses au risque préfèrent recevoir des gains immédiats en dividendes plutôt que d'avoir à patienter pour percevoir d'éventuels gains en capitaux.

La solution à ce dilemme consiste pour la firme à sélectionner des projets qui soient suffisamment rentables pour faire renoncer les actionnaires à leur préférence pour les dividendes et ce, en leur offrant des gains en capitaux qui compensent leur aversion pour le risque. En pratique, cette solution se traduit par la détermination du taux de rétention optimal à appliquer sur les bénéfices de telle sorte à maximiser la richesse des actionnaires.

III.2. Principaux modèles de l'école traditionnelle.

Toutes les théories traditionnelles partent de la formule développée par Ezra Solomon (1963) dans le cadre de la détermination du coût des fonds propres, k_c :

$$k_c = (D_1 / P_0) + g$$
$$\Rightarrow \quad k_c = B_1.(1 - b) / P_0 + r.b$$
$$\Rightarrow \quad P_0 = B_1.(1 - b) / (k_c - r.b)$$

P_0 étant le prix d'une action, la valeur de la société s'obtient en multipliant ce prix par le nombre d'actions émises, ce qui ne change rien à la détermination du taux de rétention optimal par la dérivation de P_0 par rapport à b : $\partial P_0 / \partial b$.

III.2.1. Le modèle de Gordon (1963).

Dans son modèle, Gordon continue à supposer comme l'a fait Ezra Solomon, que :

- H_1 : le coût des fonds propres (k_c) est constant ;
- H_2 : le taux de rentabilité des investissements (r) est également constant.

$$P_0 = B_1.(1 - b) / (k_c - r.b)$$
$$\Rightarrow \quad \partial P_0 / \partial b = [-B_1.(k_c - r.b) - B_1.(1 - b).(-r)] / (k_c - r.b)^2$$
$$\Rightarrow \quad \partial P_0 / \partial b = -B_1.(k_c - r) / (k_c - r.b)^2$$

Ainsi, selon Gordon, la valeur de la firme est fonction du taux de rétention (ou de distribution (d = 1 - b)), ce qui prouve bien l'existence d'une politique de dividendes optimale.

1er cas : $r > k_c \Rightarrow \partial P_0 / \partial b > 0$

Dans ce cas, le taux de rendement des capitaux investis dans l'entreprise est plus élevé que le taux de rendement offert par le marché sur ce même genre d'investissements. Les actionnaires ont donc tout intérêt à ce que l'entreprise applique un taux de rétention de 100%, et par conséquent à ce qu'elle ne distribue jamais de dividendes. C'est dans ces conditions qu'elle atteint sa valeur maximale.

2e cas : $r < k_c \Rightarrow \partial P_0 / \partial b < 0$

A l'inverse du cas précédent, le taux de rétention optimal, est ici de 0%, et le taux de distribution des dividendes, de 100%. Ainsi, les actionnaires ont intérêt à obtenir le maximum de dividendes possibles pour pouvoir les réinvestir à un taux plus élevé sur le marché.

3e cas : $r = k_c \Rightarrow \partial P_0 / \partial b = 0$

Dans ce cas, l'entreprise se trouve dans une situation où ses actionnaires sont totalement indifférents entre recevoir ou non des dividendes : il y a donc absence d'une politique de dividendes optimale.

Conclusion :

Il est clair d'après cette analyse, que nous nous trouvons devant des situations extrêmes qui contredisent la réalité des marchés financiers, puisqu'en pratique, la majorité des firmes choisissent de distribuer une partie strictement comprise entre 0 et 100% de leurs bénéfices. Il est donc nécessaire de renoncer aux hypothèses restrictives du modèle de Gordon afin d'obtenir des résultats plus crédibles.

III.2.2. Le modèle de Lintner (1962) : la renonciation à H_1.

On renonce dans le cadre de ce modèle à l'hypothèse de constance du coût des capitaux propres (k_c). En effet, selon Lintner, si les actionnaires acceptent de ne pas recevoir des dividendes, c'est que leur rentabilité attendue, k_c est nécessairement une fonction croissante du taux de rétention, b.

Dans ce cas, en reprenant l'expression de P_0, nous avons :

$$P_0 = B_1.(1 - b) / (k_c - r.b)$$
$$\Rightarrow \quad \partial P_0 / \partial b = \partial P_0 / \partial b + (\partial P_0 / \partial k_c).(\partial k_c / \partial b)$$
$$\Rightarrow \quad \partial P_0 / \partial b = [B_1.(r - k_c) / (k_c - r.b)^2] - [B_1.(1 - b) / (k_c - r.b)^2].(\partial k_c / \partial b)$$
$$\Rightarrow \quad \partial P_0 / \partial b = [B_1 / (k_c - r.b)^2].[r - k_c - (1 - b).(\partial k_c / \partial b)]$$

La maximisation de P_0, c'est à dire la détermination de la politique de dividendes optimale, s'obtient par :

$$\partial P_0 / \partial b = 0$$
$$\Rightarrow \quad b^* / : \quad r - k_c = (1 - b^*).(\partial k_c / \partial b^*) \qquad \text{avec : } \partial k_c / \partial b > 0$$

III.2.3. Le modèle de Lerner et Carleton (1964) : la renonciation à H_2.

Lerner et Carleton rejettent l'hypothèse de constance du taux de rendement des investissements, r. Ils supposent en fait, que ce taux est une fonction décroissante de b, le taux de rétention des bénéfices. Cette hypothèse de travail s'inspire de la réalité des entreprises où, le traitement classique des investissements consiste à classer ces derniers par ordre de préférence décroissant, selon le taux de rentabilité, puis de commencer à les exécuter l'un après l'autre. Ainsi, plus l'entreprise exécute d'investissements, autrement dit, plus le taux de rétention, b, est important, plus le taux de rendement, r, diminue d'un projet à l'autre.

La détermination de la politique de dividendes optimale se fait dans ce cas, comme suit :

$$P_0 = B_1.(1 - b) / (k_c - r.b)$$
$$\Rightarrow \quad \partial P_0 / \partial b = \partial P_0 / \partial b + (\partial P_0 / \partial r).(\partial r / \partial b)$$
$$\Rightarrow \quad \partial P_0 / \partial b = B_1.(r - k_c) / (k_c - r.b)^2 - [B_1.(1 - b)(-b) / (k_c - r.b)^2].(\partial r / \partial b)$$
$$\Rightarrow \quad \partial P_0 / \partial b = [B_1 / (k_c - r.b)^2].[r - k_c + b.(1 - b).(\partial r / \partial b)]$$

Ainsi :

$$\partial P_0 / \partial b = 0$$
$$\Rightarrow \quad b^* / : \quad r - k_c = - b^*.(1 - b^*).(\partial r / \partial b^*) \qquad \text{avec } \partial r / \partial b < 0$$

Conclusion :

Aussi bien les modèles théoriques que les régressions empiriques, échouent à donner une réponse définitive et irréfutable à la question de l'existence ou non d'une politique de dividendes optimale. Le problème reste donc, entièrement posé.

CHAPITRE N° 7

SYNTHESE DES DECISIONS D'INVESTISSEMENT ET DE FINANCEMENT : LA PLANIFICATION FINANCIERE

I. Objet de la planification financière.

L'objet principal de la planification financière est celui de faire concorder les besoins d'investissement de l'entreprise avec les ressources qu'elle est capable de mobiliser. Dans ce sens, il faut comprendre que les entreprises ne cherchent pas de financements spécifiques aux projets, mais rassemblent généralement toutes les ressources auxquelles elles peuvent accéder pour constituer une enveloppe budgétaire qui sera ensuite répartie sur les différents projets. Cette programmation dans le temps des investissements et des financements donne lieu à l'établissement d'un plan financier qui doit répondre aux trois questions fondamentales suivantes :

- l'aptitude de l'entreprise à absorber à court et moyen terme, le choc des investissements et désinvestissements projetés par le plan ;
- son aptitude à concilier ses plans d'investissement et de financement ;
- le profil financier qu'aura l'entreprise dans les années suivantes.

Dans le souci de répondre à ces trois questions, le plan financier se décompose en deux sous-ensembles interdépendants qui correspondent chacun à un horizon de prévision donné :

- le plan d'investissement et de financement qui est un plan financier à moyen terme ;
- les budgets annuels qui comprennent essentiellement un budget d'investissement et un budget de trésorerie. Ces budgets constituent le plan financier à court terme.

L'objet de ce chapitre est celui d'étudier la planification à moyen terme.

II. Elaboration du plan d'investissement et de financement (PIF).

La logique du plan financier à moyen terme aboutit à la construction d'un tableau de financement prévisionnel (sur trois à cinq ans généralement) dans lequel sont incorporés tous les éléments liés :

- à la poursuite des activités existantes et aux projets d'investissement retenus ;
- aux financements dont peut disposer l'entreprise, tout en tenant compte du fait que le financement lui-même est générateur de dépenses futures (charges financières et dividendes).

II.1. Représentation du PIF.

Le PIF se compose de deux parties distinctes :

- la première, intitulée « besoins de financement » regroupe toutes les sorties de fonds que doit subir l'entreprise, échelonnées dans le temps ;
- la seconde, intitulée « ressources de financement », regroupe toutes les entrées de fonds dont bénéficiera l'entreprise sur la durée du plan.

L'écart, sur chaque année, entre ressources et besoins, constitue la trésorerie (positive ou négative) de l'entreprise sur la période et, son solde de départ pour l'année suivante. La prudence veut qu'il soit préférable de ne pas entendre l'équilibre dans le sens d'une trésorerie nulle et que l'entreprise dispose de ressources supérieures à ses emplois pour faire face aux imprévus qui ne manquent souvent pas de surgir.

Concrètement, le PIF se présente de la manière suivante :

	n + 1	**n + 2**	**...**	**n + 5**
Besoins de financement :				
1- Investissements				
2- Investissements en BFR				
3- Prêts accordés par l'entreprise				
4- Remboursements de dettes				
5- Dividendes à distribuer				
Total des besoins de financement (1)	-	-	-	-
Ressources de financement :				
6- Augmentations de capital				
7- Capacité d'autofinancement (CAF)				
8- Désinvestissements (cessions d'actifs immobilisés)				
9- Désinvestissements en BFR				
10- Emprunts à moyen et long terme				
11- Prêts remboursés par autrui				
Total des ressources de financement (2)	-	-	-	-
Variation de trésorerie annuelle (3) = (2) - (1)	-	-	-	-
Trésorerie initiale (4)	-	-	-	-
Trésorerie finale (5) = (3) + (4)	-	-	-	-

II.2. Le détail des éléments constitutifs du PIF.

La construction du PIF obéit à des règles strictes qui sont les suivantes :

1- Les investissements comprennent les investissements corporels, incorporels et financiers et doivent dans tous les cas être évalués et inscrits hors TVA.

2- Il s'agit de l'investissement en BFR nécessaire sur la période et non du BFR total. Il faut par ailleurs vérifier si l'équilibre financier de l'entreprise est initialement assuré ou pas :

- si l'entreprise est financièrement en équilibre, c'est à dire que son fonds de roulement est suffisant pour faire face aux besoins dans la situation initiale, il suffit de prévoir les accroissements de BFR consécutifs au programme d'investissement envisagé ;
- si au contraire, l'équilibre financier n'est pas réalisé avant le démarrage du plan, il faut prévoir, en plus de ces accroissements, une reconstitution du fonds de roulement.

3- Tout prêt de moyen ou long terme accordé par l'entreprise à ses actionnaires, ses clients, ses salariés... doit être inscrit dans cette rubrique.

4- Il s'agit uniquement du remboursement du principal des emprunts (les charges financières n'y sont pas incluses). En effet, les intérêts viennent diminuer le bénéfice et donc la capacité d'autofinancement, qui figure plus bas dans le PIF.

5- Les dividendes à distribuer sont à prévoir en fonction de la politique de distribution de la société. Il ne faut toutefois pas oublier de tenir compte du fait que les augmentations de capital prévues par le plan sont elles-mêmes génératrices de dividendes supplémentaires à distribuer.

6- On distingue généralement entre quatre grands types d'opérations d'augmentation de capital :

- l'augmentation de capital par souscription d'actions nouvelles en numéraire ;
- l'augmentation de capital par apport en nature ;
- l'augmentation de capital par incorporation de réserves ;
- l'augmentation de capital par conversion de dettes.

Bien entendu, seules les augmentations par apport en nature ou en numéraire constituent une augmentation de ressources à inscrire au niveau du PIF.

7- La CAF représente la part du chiffre d'affaires de l'entreprise qui reste disponible pour financer ses investissements et rémunérer ses actionnaires[6]. Elle provient aussi bien de l'utilisation du capital existant de l'entreprise que de la mise en service progressive des nouveaux moyens de production en cours de la période de réalisation du plan. Elle se calcule de la manière suivante :

CAF = Bénéfice net[7]
+ Dotations aux amortissements et aux provisions
- plus-values sur cessions d'immobilisations
+ moins-values sur cessions d'immobilisations[8]

8- Tout comme les acquisitions, les cessions d'immobilisations sont à considérer hors TVA.

9- Les investissements en BFR négatifs dégagés sur certaines périodes du plan constituent clairement une ressource pour l'entreprise.

10- Lors de l'élaboration du PIF, les dettes posent une certaine difficulté due au fait que l'on détermine initialement un certain besoin d'emprunt nécessaire au financement des emplois fixés, mais que l'emprunt augmente à son tour les besoins de l'entreprise, de par les futurs remboursements qu'il occasionne et qui vont devoir être prévus dès le départ.

11- Il ne s'agit de tenir compte que du principal récupéré, les intérêts reçus étant inclus dans la CAF à travers le bénéfice.

[6] La soustraction des dividendes à partir de la CAF, donne la valeur de l'autofinancement de l'entreprise.
[7] La CAF se calcule à partir du bénéfice net comptable, le BFR faisant la différence au niveau du plan.
[8] La réintégration des plus ou moins values sur cessions au niveau de la CAF permet d'obtenir avec le BN, l'équivalent du prix de cession net (PCN) pour les cash-flows.

Application*

Pour faire face à une demande croissante, la société S envisage le renouvellement de certaines de ses immobilisations et l'extension de son unité de fabrication à partir de janvier 2013. Son programme d'investissement se présente comme suit :

	2013	2014	2015	2016	2017
Investissements d'expansion :					
Constructions	100.000	100.000	-	-	-
Equipements	500.000	200.000	70.000	300.000	60.000
Matériel roulant	200.000	150.000	50.000	50.000	25.000
Investissements de renouvellement :					
Equipements	150.000	50.000	30.000	30.000	30.000
Matériel roulant	75.000	25.000	50.000	25.000	50.000

Les dotations aux amortissements figurant dans l'état de résultat arrêté le 31/12/2012 sont de 70.000 dinars. Ces dotations continueront à être constatées jusqu'en 2017. Quant aux nouvelles immobilisations, elles seront toutes amorties linéairement sur les durées suivantes : 20 ans pour les constructions, 10 ans pour les équipements et 5 ans pour le matériel roulant.

Si ces investissements sont réalisés, le résultat brut d'exploitation de la société évoluera comme suit :

	2013	2014	2015	2016	2017
RBE	300.000	390.000	430.000	470.000	490.000

Les contacts établis avec les banquiers permettent à l'entreprise d'envisager des financements bancaires à moyen terme qui sont de 50% de ses besoins en matériel roulant, constructions et équipements pour une même année. Ces emprunts remboursables sur 5 années seraient obtenus au taux de 15% l'an. Tout emprunt obtenu en début d'année, donnera lieu à un paiement des intérêts sur le restant dû, le 31 décembre de la même année et à un remboursement du capital le 1er janvier de l'année suivante.

L'entreprise a aussi pu obtenir de la dernière assemblée générale, une décision limitant les dividendes à 20% des bénéfices nets pendant toute la durée de plan. Les actionnaires se sont en outre engagés à participer à d'éventuelles augmentations de capital que pourrait nécessiter la réalisation des investissements. Cette éventualité ne pourra toutefois être envisagée que pour compléter le financement bancaire et équilibrer le plan d'investissement et de financement de l'entreprise.

Sachant que la société est soumise à l'impôt sur les sociétés au taux de 35%, construire son plan d'investissement et de financement pour la période 2013/2017.

Corrigé :

Tableau d'amortissement des immobilisations :

	2013	2014	2015	2016	2017
Anciennes immobilisations	70.000	70.000	70.000	70.000	70.000
Constructions	5.000	5.000 5.000	5.000 5.000	5.000 5.000	5.000 5.000
Equipements	65.000	65.000 25.000	65.000 25.000 10.000	65.000 25.000 10.000 33.000	65.000 25.000 10.000 33.000 9.000
Matériel roulant	55.000	55.000 35.000	55.000 35.000 20.000	55.000 35.000 20.000 15.000	55.000 35.000 20.000 15.000 15.000
Total des dotations aux amortissements	**195.000**	**260.000**	**290.000**	**338.000**	**362.000**

Calculs sur les emprunts bancaires :

	2013	2014	2015	2016	2017
Emprunts	512.500	262.500	100.000	202.500	82.500
Remboursement du principal	- - - -	102.500 - - -	102.500 52.500 - -	102.500 52.500 20.000 -	102.500 52.500 20.000 40.500
Restant dû	512.500	672.500	617.500	645.000	512.000
Charges financières	76.875	100.875	92.625	96.750	76.800

Détermination du BN, de la CAF et des dividendes :

	2013	2014	2015	2016	2017
RBE	300.000	390.000	430.000	470.000	490.000
Dotations aux amortissements	195.000	260.000	290.000	338.000	362.000
Charges financières	76.875	100.875	92.625	96.750	76.800
Bénéfice avant impôt	28.125	29.125	47.375	35.250	51.200
Bénéfice net	18.281,25	18.931,25	30.793,75	22.912,5	33.280
Capacité d'Autofinancement	213.281,25	278.931,25	320.793,75	360.912,5	395.280
Dividendes	3.656,25	3.786,25	6.158,75	4.582,5	6.656

Tableau d'investissement et de financement :

	2013	2014	2015	2016	2017
Emplois					
Investissements	1.025.000	525.000	200.000	405.000	165.000
Rembours^{mt} des emprunts	0	102.500	155.000	175.000	215.500
Dividendes	3.656,25	3.786,25	6.158,75	4.582,5	6.656
Total des emplois	**1.028.656,25**	**631.286,25**	**361.158,75**	**584.582,5**	**387.156**
Ressources					
CAF	213.281,25	278.931,25	320.793,75	360.912,5	395.280
Emprunts	512.500	262.500	100.000	202.500	82.500
Total des ressources	**725.781,25**	**541.431,25**	**420.793,75**	**563.412,5**	**477.780**
Besoin ou Excédent	**-302.875**	**-89.855**	**+59.635**	**-21.170**	**+90.624**
Augmentation de capital	+302.875	+89.855	-	-	-
Solde initial	**0**	**0**	**0**	**+59.635**	**+38.465**
Solde final	**0**	**0**	**+59.635**	**+38.465**	**+129.089**